



اسم الطالب

٢٠٢١

تصميم  
محمود عوض  
معلم رياضيات

تصميم  
محمود عوض  
معلم رياضيات

ملزمة

# هندسة

## وحساب مثلثات



الترم  
الأول

الصف  
الثالث  
الإعدادي

تصميم  
محمود عوض  
معلم رياضيات

تصميم  
محمود عوض  
معلم رياضيات



معلم  
أول  
رياضيات

محمد عوفى حسن

إعداد  
و  
تصميم

## النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

## القياس الستيني للزاوية الحادة

- ♦ وحدات القياس الستيني للزاوية هي : الدرجة ° ، الدقيقة ' ، الثانية "
- ♦ الدرجة = ٦٠ دقيقة ، الدقيقة = ٦٠ ثانية أي أن ٦٠' = ١° ، ٦٠" = ١'
- ♦ في الآلة الحاسبة يستخدم مفتاح  $\circ$  لكتابة الدرجات والدقائق والثواني

مثال ١ اكتب الزاوية ٤٢° ٢٤' ٣٥" بالدرجات:

الحل: نحول باستخدام الآلة الحاسبة كالتالي:

ابدأ  $\rightarrow$   $\circ$  ٣٥  $\circ$  ٢٤  $\circ$  ٤٢  $\circ$  =  $\circ$  ٣٥,٤١١٦٦٦٧

فيكون الناتج هو

مثال ٢ اكتب الزاوية ٥٤,٣٦° بالقياس الستيني:

الحل: نحول باستخدام الآلة الحاسبة كالتالي:

ابدأ  $\rightarrow$   $\circ$  ٥٤,٣٦  $\circ$  =  $\circ$  ٥٤ ٢١ ٣٦

فيكون الناتج هو

تذكر

- مجموع قياس الزاويتين المتتامتين = ٩٠°
- مجموع قياس الزاويتين المتكاملتين = ١٨٠°
- مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

مثال ٢ إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة للمثلث ٣ : ٤ : ٧ فأوجد القياس الستيني لكل منها

الحل

قياس الزاوية الأولى = ٣ م ،  
قياس الزاوية الثانية = ٤ م  
قياس الزاوية الثالثة = ٧ م  
∴ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠  
∴ ٣م + ٤م + ٧م = ١٨٠  
١٤م = ١٨٠ ∴ م = ١٢,٩  
الأولى = ٣٨,٧ = ٣ × ١٢,٩  
الثانية = ٥١,٦ = ٤ × ١٢,٩  
الثالثة = ٩٠,٣ = ٧ × ١٢,٩

مثال ١ إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين كنسبة ٣ : ٥ فأوجد مقدار كل منهما بالقياس الستيني

الحل

قياس الزاوية الأولى = ٣ م ،  
قياس الزاوية الثانية = ٥ م  
∴ مجموع قياسي الزاويتين المتكاملتين = ١٨٠  
∴ ٣م + ٥م = ١٨٠  
٨م = ١٨٠ ∴ م = ٢٢,٥  
قياس الزاوية الأولى = ٣م = ٢٢,٥ × ٣ = ٦٧,٥  
قياس الزاوية الثانية = ٥م = ٢٢,٥ × ٥ = ١١٢,٥



ظا

جتا

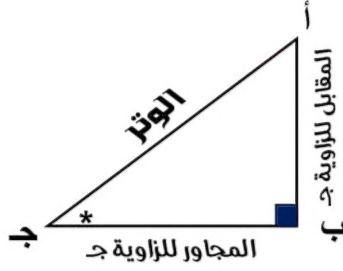
جا

## النسب المثلثية الأساسية

إذا كان  $\Delta$  أ ب ج قائم الزاوية في ب

يمكن حساب النسب المثلثية لأي من الزاويتين الحادتين أ ، ج

ولنأخذ الزاوية ج كمثال :

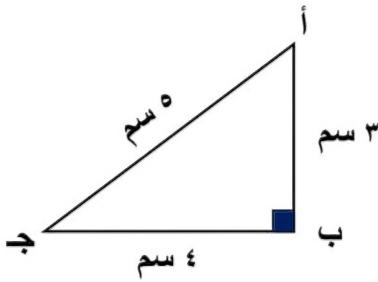


$$\text{جا ج} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} \quad (\text{جيب الزاوية } \sin)$$

$$\text{جتا ج} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}} \quad (\text{جيب تمام الزاوية } \cos)$$

$$\text{ظا ج} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}} \quad (\text{ظل الزاوية } \tan)$$

## ◆ مثال: من الشكل المقابل:



$$\text{جا ج} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5} \quad , \quad \text{جتا ج} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{ظا ج} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{3}{4} \quad \text{لاحظ أن: ظا ج} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \quad \text{وهكذا}$$

$$\text{جا أ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5} \quad , \quad \text{جتا أ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{ظا أ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{4}{3} \quad \text{لاحظ أن: جتا أ} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \quad \text{وهكذا}$$

## ملحوظة هامة

إذا طلب منك قياس زاوية لا بد أن تحسب جا أو جتا أو ظا للزاوية المطلوب قياسها ثم تستخدم مفتاح **shift**فمثلا: إذا كان جتا ب =  $\frac{1}{4}$  فإن الزاوية تحسب كالتالي:  $\frac{1}{4} \rightarrow \sin \rightarrow \text{shift}$  فيكون ق(ب) =  $60^\circ$ إذا كان جا ص =  $\frac{3}{5}$  فإن الزاوية تحسب كالتالي:  $\frac{3}{5} \rightarrow \cos \rightarrow \text{shift}$  فيكون ق(ص) =  $36,5^\circ$ 

## تذكير بنظرية فيثاغورث

إذا كان المثلث قائم يمكنك حساب طول الوتر أو طول ضلع من ضلعي القائمة

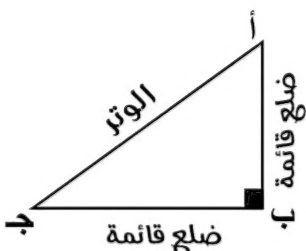
◆ **لحساب طول الوتر** : ربع ← اجمع ← اجذر

$$(\text{أ ج})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب ج})^2 \quad \text{ومنها أ ج} = \sqrt{\text{الناتج}}$$

◆ **لحساب طول ضلع القائمة** : ربع ← اطرح ← اجذر

$$(\text{ب ج})^2 = (\text{أ ج})^2 - (\text{أ ب})^2 \quad \text{ومنها ب ج} = \sqrt{\text{الناتج}}$$

$$(\text{أ ب})^2 = (\text{أ ج})^2 - (\text{ب ج})^2 \quad \text{ومنها أ ب} = \sqrt{\text{الناتج}}$$



## أمثلة محلولة

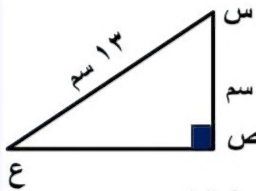
إعداد أ / محمود عوض حسن

### مثال ٢

س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص

فيه س ص = ٥ سم ، س ع = ١٣ سم أوجد:

(١) ظاس + ظاع (٢) جتاس جتاع - جاس جاع



### الحل

$$(ص ع) = ١٦٩ - ٢٥ = ١٤٤ = ١٢ \times ١٢$$

$$ص ع = ١٢ \text{ سم}$$

$$(١) \text{ ظاس + ظاع} = \frac{١٢}{١٣} + \frac{١٢}{٥} = \frac{١٦٩}{٦٠}$$

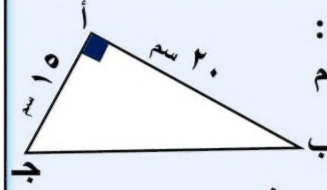
$$(٢) \text{ جتاس جتاع - جاس جاع} =$$

$$\frac{١٢}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} - \frac{٥}{١٣} \times \frac{١٣}{١٣} = \frac{١٤٤}{١٦٩} - \frac{٥}{١٦٩} = \frac{١٣٩}{١٦٩}$$

### مثال ١

في الشكل المقابل :

أ ج = ١٥ سم ، أب = ٢٠ سم



اثبت أن :

جتا ج جتا ب - ج ج جاب = صفر

### الحل

$$(ب ج) = ٢٠^2 + ١٥^2 = ٦٢٥$$

$$ب ج = ٢٥ \text{ سم}$$

$$\text{الأيمن} = \text{جتا ج جتا ب} - \text{ج ج جاب}$$

$$\frac{١٥}{٢٥} \times \frac{٢٠}{٢٥} - \frac{٢٠}{٢٥} \times \frac{١٥}{٢٥} =$$

$$= \frac{٣٠٠}{٦٢٥} - \frac{٣٠٠}{٦٢٥} = \text{صفر}$$

### مثال ٤

في الشكل المقابل:

أ ب ج د مستطيل فيه

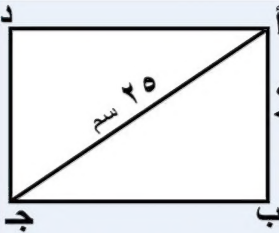
أ ب = ١٥ سم ، أ ج = ٢٥ سم

أوجد :

١- طول ب ج

٢- ق (أ ج ب)

٣- مساحة المستطيل أ ب ج د



### الحل

في  $\Delta$  أ ب ج من فيثاغورث :

$$(ب ج) = (أ ج) - (أ ب) = ٢٥^2 - ١٥^2$$

$$= ٤٠٠ - ٢٢٥ = ١٧٥$$

$$\therefore ب ج = ٢٠ \text{ سم} \quad \text{المطلوب الأول}$$

$$\therefore \text{جا (أ ج ب)} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{١٥}{٢٥}$$

$$\therefore \text{ق (أ ج ب)} = \frac{١٥}{٢٥} = \sin^{-1} \left( \frac{١٥}{٢٥} \right) = ٣٦,٥^\circ$$

مساحة المستطيل = الطول  $\times$  العرض

$$= ٢٠ \times ١٥ = ٣٠٠ \text{ سم}^2$$

### مثال ٣

أ ب ج  $\Delta$  متساوي الساقين فيه

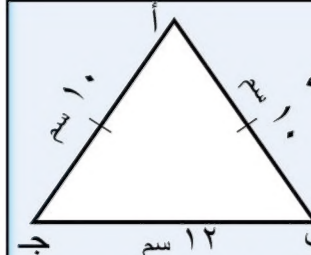
أ ب = أ ج = ١٠ سم ،

ب ج = ١٢ سم

أوجد : (١) جاب

(٢) ق (ب)

(٣) مساحة سطح  $\Delta$  أ ب ج

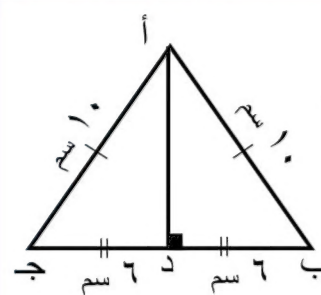


### الحل

العمل : نرسم  $\overline{أ د} \perp \overline{ب ج}$

$\therefore \overline{أ د}$  ينصف  $\overline{ب ج}$

$$\therefore ب د = ٦ \text{ سم}$$



في  $\Delta$  أ د ب من فيثاغورث :

$$(أ د) = (أ ب) - (ب د) = ١٠^2 - ٦^2 = ٦٤$$

$$\therefore أ د = ٨ \text{ سم}$$

$$\text{جاب} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$$

$$\text{ق (ب)} = \sin^{-1} \left( \frac{٤}{٥} \right) = \text{Shift Sin} \left( \frac{٤}{٥} \right)$$

مساحة سطح  $\Delta = \frac{١}{٢} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

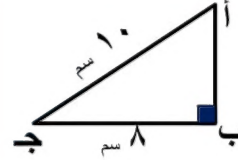
$$= \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ٨ = ٤٨ \text{ سم}^2$$



مثال ٥

أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب  
فيه أ ج = ١٠ سم ، ب ج = ٨ سم  
اثبت أن : جا<sup>٢</sup> أ + ١ = ٢ جتا<sup>٢</sup> ج + جتا<sup>٢</sup> أ

الحل



$$(أ ب)^2 = ١٠٠ = ٦٤ - ٣٦$$

$$\therefore أ ب = ٦ \text{ سم}$$

$$\frac{١٦٤}{١٠٠} = ١ + \frac{٦٤}{١٠٠} = ١ + \left(\frac{٨}{١٠}\right)^2 = \text{الأيمن}$$

$$\frac{٣٦}{١٠٠} + \frac{٦٤}{١٠٠} \times ٢ = \left(\frac{٦}{١٠}\right)^2 + \left(\frac{٨}{١٠}\right)^2 \times ٢ = \text{الأيسر}$$

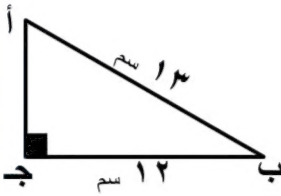
$$\frac{١٦٤}{١٠٠} = \frac{٣٦}{١٠٠} + \frac{١٢٨}{١٠٠} =$$

$$\therefore \text{الأيمن} = \text{الأيسر}$$

مثال ٦

أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ج  
حيث أ ب = ١٣ سم ، ب ج = ١٢ سم  
(١) اثبت أن : جا أ جتا ب + جتا أ جاب = ١  
(٢) أوجد : ١ + ظا أ

الحل



$$(أ ج)^2 = ١٦٩ - ١٤٤ = ٢٥$$

$$\therefore أ ج = ٥ \text{ سم}$$

$$(١) \text{ جا أ جتا ب + جتا أ جاب} =$$

$$\frac{٢٥}{١٦٩} + \frac{١٤٤}{١٦٩} = \frac{٥}{١٣} \times \frac{٥}{١٣} + \frac{١٢}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣}$$

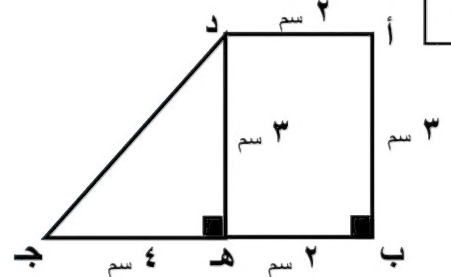
$$١ = \frac{١٦٩}{١٦٩} =$$

$$(٢) ١ + \text{ظا أ} = ١ + \left(\frac{١٢}{٥}\right)^2 = \frac{١٦٩}{٢٥} = \frac{١٤٤}{٢٥} + ١ = \frac{١٢}{٥} + ١ = \frac{١٢}{٥} + \frac{٥}{٥} = \frac{١٧}{٥}$$

مثال ٧

أ ب ج د شبه منحرف فيه  
أ د // ب ج ، ق (ب) = ٩٠°  
أ ب = ٣ سم ، ب ج = ٦ سم ، أ د = ٢ سم  
أوجد طول د ج ثم أوجد قيمة جتا (ب ج د)

الحل



العمل: نرسم د ه  $\perp$  ب ج

الشكل أ ب ه د مستطيل

$$د ه = ٣ \text{ سم} ، ه ج = ٦ - ٢ = ٤ \text{ سم}$$

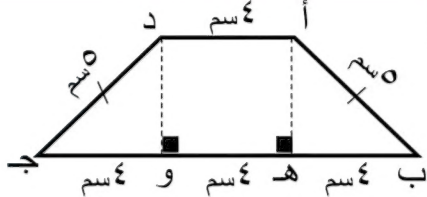
في  $\triangle د ه ج$  : من فيثاغورث

$$(د ج)^2 = ٢٥ = ٢٤ + ١ = ٢٣ + ٢ = ٢٥$$

$$\therefore د ج = ٥ \text{ سم}$$

$$\text{جتا (ب ج د)} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٤}{٥}$$

الحل



العمل: نرسم أ ه ، د و  $\perp$  ب ج

الشكل أ ه و د مستطيل

$$\therefore ه و = ٤ \text{ سم} ، ب ه = و ج = ٤ \text{ سم}$$

في  $\triangle أ ه ب$  من فيثاغورث :

$$(أ ه)^2 = ١٦ - ٢٥ = ٩$$

$$\therefore أ ه = ٣ \text{ سم} \therefore د و = ٣ \text{ سم}$$

$$\text{الأيمن} = \frac{٥}{١} = \frac{٣}{١} = \frac{\frac{٤}{٥} \times \frac{٣}{٤} \times ٥}{\frac{٤}{٥} + \frac{٣}{٥}} = \frac{٣}{١}$$

## تدريبات

إعداد أ / محمود عوض حسن

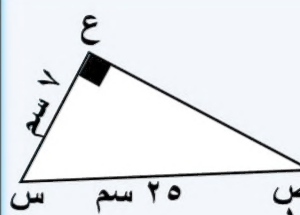
١ في الشكل المقابل:

س ص ع  $\Delta$  قائم في ع

س ع = ٧ سم ، س ص = ٢٥ سم

(١) أوجد: ظا س  $\times$  طا ص

(٢) اثبت أن: جا س + جا ص = ١



الحل

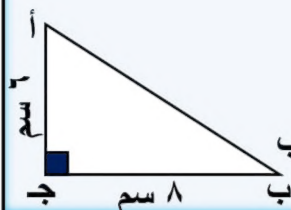
٢ في الشكل المقابل:

أ ب ج  $\Delta$  قائم في ج

أ ج = ٦ سم ، ب ج = ٨ سم

(١) أوجد: جتا أ جتا ب - جا أ جا ب

(٢) أوجد ق (ب)



الحل

٣ س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص فيه :

س ص = ٥ سم ، س ع = ١٣ سم

فأوجد قيمة جتا س جتا ع - حاس جا ع

٤

أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب حيث:

أ ب = ٧ سم ، ب ج = ٢٤ سم فأوجد قيمة:

(١) ٣ ظا أ  $\times$  طا ج (٢) جا أ + جا ب ج

الحل

الحل



## تمارين على النسب المثلثية للزاوية الحادة

٨ في الشكل المقابل:

أ ب ج د مستطيل فيه  
 أ ب = ١٥ سم ، أ ج = ٢٥ سم  
 أوجد :  
 (١) طول أ ج  
 (٢) قيمة : ٥ ظا (أ د ج) - ١٣ جا (د أ ج)  
 (٣) مساحة المستطيل أ ب ج د

٩ أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ج فيه  
 أ ج = ٦ سم ، ب ج = ٨ سم  
 أوجد قيمة: جتا أ جتا ب - جا أ جا ب

١٠ في الشكل المقابل:

ق (أ د ج) = ق (ب أ ج) = ٩٠°  
 أ د = ٤ سم ، ج ب = ١٣ سم  
 أوجد قيمة:  
 ظا (د أ ج) جا (أ ج ب) - جا ب جتا (ج أ د)

١١ أ ب ج مثلث فيه أ ب = أ ج = ١٠ سم  
 ب ج = ١٢ سم ، أ د ⊥ ب ج يقطعه في د  
 (١) اثبت أن: جا ب + جتا ج = ٧/٥  
 (٢) أوجد قيمة جا ٢ ج + جتا ٢ ج

١٢ في الشكل المقابل:

أ ب ج د شبه منحرف قائم في ب  
 أ د // ب ج ، أ ب = ٦ سم  
 ب د = ١٠ سم ، ق (ب د ج) = ٩٠°  
 أوجد ظا (أ د ب) ، طول د ج

١ إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين ٣ : ٤  
 فأوجد قياس كل منهما بالقياس الستيني

٢ إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين  
 ٥ : ٢ فأوجد قياس كل منهما بالقياس الستيني

٣ إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا المثلث الداخلة  
 ٢ : ٣ : ٤ فأوجد قياس كل منها بالقياس الستيني

٤ في الشكل المقابل:

أوجد النسب المثلثية الأساسية  
 للزاويتين أ ، ج

٥ في الشكل المقابل:

أ ب ج مثلث قائم في ب  
 أ ج = ١٠ سم ، ج ب = ٨ سم  
 أوجد قيمة: جا ج جتا أ + جا أ جتا ج

٦ أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب  
 فإذا كان ٢ أ ب = ٣ أ ج  
 فأوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية ج

٧ في الشكل المقابل:

أ د ⊥ ب ج ، أ ب = ١٣ سم  
 أ ج = ١٥ سم ،  
 د ج = ٩ سم  
 فأوجد قيمة ظا ب

## النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

## الزاوية ٤٥

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \text{جا } ٤٥$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \text{جتا } ٤٥$$

$$\text{ظا } ٤٥ = ١$$

## الزاوية ٦٠

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{جا } ٦٠$$

$$\frac{1}{2} = \text{جتا } ٦٠$$

$$\sqrt{3} = \text{ظا } ٦٠$$

## الزاوية ٣٠

$$\frac{1}{2} = \text{جا } ٣٠$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{جتا } ٣٠$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \text{ظا } ٣٠$$

## ملاحظات هامة

$$\text{جا } ٣٠ = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \text{جا } ٤٥ \quad \text{جتا } ٣٠ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \text{جتا } ٦٠ \quad \text{ظا } ٣٠ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \text{ظا } ٤٥$$

خد بالك:  $\text{جتا } ٣٠ = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \text{جتا } ٦٠$  وليس ٩  $\text{جتا } ٦٠ = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{1}{2} \right) = \text{جتا } ٣٠$  وليس ٤ وهكذا

$$\text{جا الزاوية} = \text{جتا المتمة لها} \quad \text{مثل: جا } ٣٠ = \text{جتا } ٦٠, \text{ جا } ٦٠ = \text{جتا } ٣٠, \text{ جتا } ٢٥ = \text{جا } ٦٥$$

$$\text{ظا الزاوية} = \frac{\text{جا الزاوية}}{\text{جتا الزاوية}} \quad \text{مثل: ظا } ٣٠ = \frac{\text{جا } ٣٠}{\text{جتا } ٣٠} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{ظا } ٣٠$$

٤ لحساب النسب المثلثية لأي زاوية غير ٣٠ أو ٦٠ أو ٤٥ نحسبها باستخدام الآلة

فمثلا جا ٣٦ تكتب على الآلة:  $\sin ٣٦$  ، جتا ٥٠ تكتب:  $\cos ٥٠$  وهكذا

## حساب قياس الزاوية بمعلومية النسبة المثلثية لها

- إذا كان جتا هـ = ٠,٧١٥٢ فإن ق (هـ) =  $\hat{h} = \text{shift cos } ٠,٧١٥٢ = ٤٤,٢^\circ$
- إذا كان جا هـ = ٠,٦٢١٨ فإن ق (هـ) =  $\hat{h} = \text{shift sin } ٠,٦٢١٨ = ٣٨^\circ$
- إذا كان ظا هـ = ١,٥١٥٦ فإن ق (هـ) =  $\hat{h} = \text{shift tan } ١,٥١٥٦ = ٥٦^\circ$
- إذا كان جتا هـ = ٠,٥ فإن ق (هـ) =  $\hat{h} = ٦٠^\circ$  وإذا كان ظا هـ = ١ فإن ق (هـ) =  $\hat{h} = ٤٥^\circ$



## مساب مكات

### مثال ١

أوجد قيمة المقدار التالي مبينا خطوات الحل:

$$٤٥ \text{ جتا } ٤٥ + ٣٠ \text{ جتا } ٦٠ - ٣٠ \text{ جتا } ٣٠$$

### الحل

$$\text{المقدار} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \text{صفر}$$

### مثال ٢

بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن :

$$١ - ٣٠ \text{ جتا } ٣٠ = ٦٠ \text{ جتا } ٦٠$$

### الحل

$$\text{الأيمن} = ٦٠ \text{ جتا } ٦٠ = \frac{1}{2}$$

$$\text{الأيسر} = ١ - ٣٠ \text{ جتا } ٣٠$$

$$\frac{1}{2} = ١ - \frac{3}{4} \times ٢ = ١ - \frac{3}{2} \times ٢ = ١ - ٣ = -٢$$

∴ الأيمن = الأيسر

### مثال ٣

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة:

$$٦٠ \text{ جتا } ٦٠ - ٣٠ \text{ جتا } ٣٠$$

### الحل

$$\text{المقدار} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = ٠$$

### مثال ٤

بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن :

$$٣٠ \text{ جتا } ٣٠ = ٥٠ \text{ جتا } ٦٠ - ٤٥ \text{ جتا } ٤٥$$

### الحل

$$\text{الأيمن} = ٣٠ \text{ جتا } ٣٠ = \frac{1}{2}$$

$$\text{الأيسر} = ٥٠ \text{ جتا } ٦٠ - ٤٥ \text{ جتا } ٤٥$$

$$= ١ - \frac{1}{2} \times ٥ = ١ - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} = ١ - \frac{5}{2} = ١ - \frac{5}{2} \times ١ = ١ - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{الأيمن} = \text{الأيسر}$$

### مثال ٥

أوجد قيمة المقدار:  $\frac{٦٠ \text{ جتا } ٦٠ + ٣٠ \text{ جتا } ٣٠}{٦٠ \text{ جتا } ٦٠}$

### الحل

$$\text{المقدار} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = ٢$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = ٢$$

### مثال ٦

اثبت أن:  $\frac{٢ \text{ ظا } ٣٠}{٣٠ \text{ ظا } ١} = ٦٠ \text{ ظا } ١$

### الحل

$$\text{الطرف الأيمن} = ٦٠ \text{ ظا } ١ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \times 2}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{الأيسر}$$

$$\text{الأيمن} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

## حساب مثلثات

مثال ٧

أوجد قيمة س التي تحقق :  
ظا س = ٤ جتا ٦٠ جا ٣٠  
حيث س زاوية حادة

الحل

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 4 = \text{ظا س}$$

$$\frac{1}{4} \times 4 = \text{ظا س}$$

$$\text{ظا س} = 1$$

$$\therefore \text{س} = ٤٥$$

مثال ٨

بدون استخدام الآلة أوجد قيمة س حيث :  
٢ جا س = جا ٣٠ جتا ٦٠ + جتا ٣٠ جا ٦٠

الحل

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = ٢ \text{ جا س}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = ٢ \text{ جا س}$$

$$٢ \text{ جا س} = 1$$

$$\therefore \text{جا س} = \frac{1}{2} \quad \therefore \text{س} = ٣٠$$

مثال ٩

أوجد قيمة هـ حيث هـ زاوية حادة إذا كان :  
جا هـ = جا ٦٠ جتا ٣٠ - جتا ٦٠ جا ٣٠

الحل

$$\text{جا هـ} = \text{جا ٦٠ جتا ٣٠} - \text{جتا ٦٠ جا ٣٠}$$

$$\text{جا هـ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\text{جا هـ} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\therefore \text{جا هـ} = \frac{1}{2} \quad \therefore \text{هـ} = ٣٠$$

مثال ١٠

أوجد قيمة س التي تحقق  
٢ جا س = ظا ٦٠ - ظا ٣٠  
حيث س زاوية حادة

الحل

$$٢ \text{ جا س} = \text{ظا ٦٠} - \text{ظا ٣٠}$$

$$٢ \text{ جا س} = \sqrt{3} - 1$$

$$٢ \text{ جا س} = ٢ - ٣$$

$$٢ \text{ جا س} = 1$$

$$\text{جا س} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{س} = ٣٠$$

مثال ١١

إذا كان جا هـ ظا ٣٠ = جتا ٤٥  
فأوجد ق ( هـ ) حيث هـ زاوية حادة

الحل

$$\text{جا هـ} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{جا هـ} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3}$$

$$\text{جا هـ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{جا هـ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \text{ق (هـ)} = ٦٠^\circ$$

مثال ١٢

إذا كانت جا س = ظا ٣٠ جا ٦٠  
حيث س زاوية حادة فأوجد قيمة : ٤ جتا س جا س

الحل

$$\text{جا س} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{جا س} = \frac{1}{2} \quad \text{س} = ٣٠$$

$$\therefore ٤ \text{ جتا س جا س} = ٤ \text{ جتا ٣٠ جا ٣٠}$$

$$= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$



١ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة:

$$\text{جتا } 60^\circ \text{ جا } 30^\circ - \text{جا } 60^\circ \text{ ظا } 30^\circ + \text{جتا } 30^\circ$$

الحل

٢

بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن:

$$\text{ظا } 60^\circ - \text{ظا } 45^\circ = \text{جا } 30^\circ$$

الحل

٣ أوجد قيمة س حيث س زاوية حادة إذا كان:

$$\text{ظا } 2^\circ \text{ س} = \text{جا } 30^\circ \text{ جتا } 30^\circ$$

الحل

٤

أوجد قيمة س (حيث س زاوية حادة) التي تحقق:

$$\text{س جتا } 60^\circ = \text{جا } 30^\circ + \text{ظا } 45^\circ$$

الحل

## أَسْئَلَةُ اخْتَرِ عَلَى حَسَابِ الْمُثَلَّثَاتِ

- ١) جا ٤٥ جتا ٤٥ = .....  
 (أ) ٢ (ب) ١ (ج)  $\frac{1}{4}$  (د)  $\frac{1}{6}$
- ٢) ٤ جتا ٣٠ ظا ٦٠ = .....  
 (أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٦ (د)  $\sqrt[3]{3}$
- ٣) ٤ جتا ٣٠ ظا ٦٠ = .....  
 (أ) ٣٠ جا (ب) ٦٠ جا (ج) جتا ٤٥ (د) ظا ٣٠
- ٤) إذا كان جا هـ = جتا هـ فإن ق (هـ) = .....  
 (أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (ج) ٦٠ (د) ٩٠
- ٥) في  $\Delta$  أ ب ج القائم الزاوية في ب يكون جا أ + جتا ج = .....  
 (أ) ٢ جا ج (ب) ٢ جاب (ج) ٢ جا أ (د) ٢ جتا أ
- ٦) إذا كان جا ٢ س = ٠,٥ وكانت س زاوية حادة فإن ق (س) = .....  
 (أ) ٧٠ (ب) ٦٠ (ج) ١٥ (د) ٣٠
- ٧) إذا كان جتا ٣ س =  $\frac{1}{4}$  حيث ٣ س زاوية حادة فإن ق (س) = .....  
 (أ) ١٠ (ب) ٢٠ (ج) ٣٠ (د) ٦٠
- ٨) إذا كان جتا  $\frac{س}{4} = \frac{\sqrt[3]{3}}{4}$  حيث س زاوية حادة فإن س = .....  
 (أ) ١٥ (ب) ٢٠ (ج) ٣٠ (د) ٦٠
- ٩) إذا كان جتا  $\frac{س}{4} = \frac{1}{4}$  حيث  $\frac{س}{4}$  زاوية حادة فإن ق (س) = .....  
 (أ) ١٠٠ (ب) ١٢٠ (ج) ١٣٠ (د) ١١٠
- ١٠) في إذا كان ظا ٣ س = ١ فإن ق (س) = .....  
 (أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ١٥ (د) ٤٥
- ١١) ظا ٤٥ جا ٣٠ = .....  
 (أ) ١ (ب)  $\frac{1}{4}$  (ج)  $\frac{2}{3}$  (د)  $\frac{1}{4}$
- ١٢) ظا ٤٥ + جا ٣٠ = .....  
 (أ) ١ (ب)  $\frac{1}{4}$  (ج)  $\frac{3}{4}$  (د)  $\frac{2}{3}$



## تمارين على النسب المثلثية لبعض الزوايا

(ج) أوجد قيمة س التي تحقق الآتي حيث أن س زاوية حادة :

١) ظا س = ٤ جا ٣٠ جتا ٦٠

٢) جا س = ٢ جا ٣٠ جتا ٦٠

٣) جا س = ٣ جا ٣٠ جتا ٦٠

٤) جا س = جا ٦٠ جتا ٣٠ - جتا ٦٠ جا ٣٠

٥) س جا ٣٠ جتا ٤٥ = جتا ٣٠

٦) س - جا ٣٠ جتا ٤٥ = جا ٦٠

٧) ٤ س = جتا ٣٠ ظا ٣٠ - ظا ٤٥

٨) ظا س = جتا ٣٠ - جا ٣٠

٩) س جتا ٦٠ جتا ٤٥ = جا ٦٠

١٠) ٣ ظا س = ٢ جا ٣٠ + جتا ٦٠

١١) س جا ٤٥ = ظا ٦٠

١٢) جا س جا ٦٠ = ٣ جا ٤٥ جتا ٤٥ - جتا ٦٠

(أ) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

١) جتا ٣٠ + جتا ٦٠ + جا ٢ جا ٣٠

٢) جتا ٦٠ جا ٣٠ - جا ٦٠ جتا ٣٠

٣) ظا ٦٠ - ٢ جا ٤٥ جتا ٤٥

٤)  $\frac{\text{جا } ٣٠}{\text{جتا } ٦٠} - \text{جتا } ٣٠ \text{ جا } ٦٠$

٥) (جتا ٣٠ - جتا ٦٠) (جا ٦٠ + جا ٣٠)

٦)  $\frac{\text{جتا } ٦٠ + \text{جتا } ٣٠ + \text{ظا } ٤٥}{\text{جا } ٦٠ \text{ ظا } ٦٠ + \text{جا } ٣٠}$

(ب) بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن :

١) ٤ جا ٤٥ جتا ٤٥ = ٢

٢) جتا ٦٠ = ٥ جا ٣٠ - ظا ٤٥

٣) جتا ٦٠ = جتا ٣٠ ظا ٣٠ - ظا ٤٥

٤) ظا ٦٠ - ظا ٤٥ = جا ٦٠ + جتا ٦٠ + جا ٣٠

٥) ٢ جا ٣٠ + ٤ جتا ٦٠ = ظا ٦٠

٦) جا ٦٠ = ٢ جا ٣٠ - جتا ٣٠

٧) جا ٤٥ ظا ٦٠ - ٢ جا ٦٠ = صفر

٨) ٤ جا ٣٠ + ظا ٤٥ = ظا ٦٠

٩) جا ٦٠ = ٢ جا ٣٠ - جتا ٣٠

١٠) جتا ٦٠ = جتا ٣٠ - جا ٣٠

١١) جا ٣٠ = ٩ جتا ٦٠ - ظا ٤٥

١٢) ظا ٦٠ = ٢ ظا ٣٠ ÷ (١ - ظا ٣٠)

(د) إذا كان ظا س =  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  حيث س زاوية حادة

فأوجد قيمة: جا س ظا  $(\frac{3}{4} \text{ س})$  + جتا  $(٢ \text{ س})$

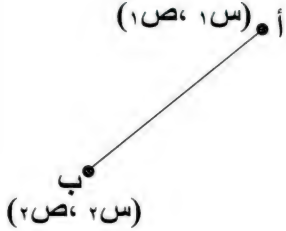
(هـ) أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب

فإذا كان ٢ أب =  $\sqrt{3}$  أ ج

فأوجد قيمة: جتا ج جا أ - جا ج جتا أ

## البعد بين نقطتين

إذا كانت النقطة أ (س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>) ، النقطة ب (س<sub>٢</sub>، ص<sub>٢</sub>) فإنه يمكن حساب البعد بين النقطتين بالقانون:



$$\text{البعد بين نقطتين} = \sqrt{(s_2 - s_1)^2 + (v_2 - v_1)^2}$$

$$\text{أي أن البعد} = \sqrt{\text{مربع فرق السينات} + \text{مربع فرق الصادات}}$$

### مثال ١

أوجد البعد بين النقطتين (٢، ٣) ، (١، ٥)

#### الحل

$$\begin{aligned} \text{البعد} &= \sqrt{(s_2 - s_1)^2 + (v_2 - v_1)^2} \\ &= \sqrt{(1 - 2)^2 + (5 - 3)^2} \\ &= \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

### مثال ٢

إذا كانت أ (٢، ٦) ، ب (١، ١) فأوجد طول أ ب

#### الحل

$$\begin{aligned} \text{أ ب} &= \sqrt{(2 - 1)^2 + (6 - 1)^2} \\ &= \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26} \text{ وحدة طول} \end{aligned}$$

## ملاحظات هامة

١) لحساب طول ضلع نحسب البعد بين نقطة بدايته ونقطة نهايته.

٢) البعد بين النقطة (س، ص) ونقطة الأصل  $\sqrt{s^2 + v^2}$

٣) بعد النقطة (س، ص) عن محور الصادات = |س| بينما بعد النقطة عن محور السينات = |ص|

مثال : بعد النقطة (٥، -٢) عن محور الصادات = ٥ ، بعد النقطة (٣، -٤) عن محور السينات = ٤

٤) نوع المثلث بالنسبة لأضلاعه ٣ أنواع : متساوي الساقين - متساوي الأضلاع - مختلف الأضلاع

٥) نوع المثلث بالنسبة لزاياه ٣ أنواع : حاد - قائم - منفرج

## قوانين المساحات

◆ مساحة المعين =  $\frac{1}{2}$  حاصل ضرب طولَي القطرين

◆ مساحة الدائرة =  $\pi r^2$  نق

◆ محيط الدائرة =  $2\pi r$  نق

◆ مساحة المثلث =  $\frac{1}{2}$  طول القاعدة × ع

◆ مساحة المربع = طول الضلع × نفسه

◆ مساحة المستطيل = الطول × العرض



## إثباتات هامة باستخدام البعد

### إثبات أن: $\Delta$ أ ب ج قائم في ب

نحسب: طول أ ب ، ب ج ، أ ج ثم نربع النواتج

نثبت أن: (أ ج)<sup>2</sup> الأكبر = (أ ب)<sup>2</sup> + (ب ج)<sup>2</sup>

### إثبات أن: أ ، ب ، ج رؤوس مثلث

نحسب: طول أ ب ، ب ج ، أ ج

نثبت ن: مجموع طولى أي ضلعين < طول الثالث

مثل: أ ب + ب ج < أ ج

### إثبات أن: $\Delta$ أ ب ج حاد

نحسب: طول أ ب ، ب ج ، أ ج ثم نربع النواتج

نثبت أن: (أ ج)<sup>2</sup> الأكبر > (أ ب)<sup>2</sup> + (ب ج)<sup>2</sup>

### إثبات أن: $\Delta$ أ ب ج منفرج

نحسب: طول أ ب ، ب ج ، أ ج ثم نربع النواتج

نثبت أن: (أ ج)<sup>2</sup> الأكبر < (أ ب)<sup>2</sup> + (ب ج)<sup>2</sup>

### إثبات أن: الشكل أ ب ج د معين

- نحسب: أطوال أضلاعه الأربعة
  - نثبت أن أضلاعه الأربعة متساوية في الطول
- أ ب = ب ج = ج د = د أ

### إثبات أن: الشكل أ ب ج د متوازي أضلاع

- نحسب: أطوال أضلاعه الأربعة
  - نثبت أن: كل ضلعان متقابلان متساويان
- أى أن: أ ب = ج د ، ب ج = د أ

### إثبات أن: الشكل مربع

نحسب: أطوال أضلاعه الأربعة والقطران

- نثبت أن أضلاعه الأربعة متساوية في الطول
- نثبت أن القطران متساويان

### إثبات أن: الشكل مستطيل

نحسب: أطوال أضلاعه الأربعة والقطران

- نثبت أنه متوازي أضلاع (كل ضلعان متقابلان متساويان)
- نثبت أن القطران متساويان

### إثبات أن: النقط أ، ب، ج تمر بدائرة مركزها م

نحسب: طول أ م ، ب م ، ج م بالبعد

ثم نثبت أن: أ م = ب م = ج م = نق

### إثبات أن: النقط تقع على استقامة واحدة

نحسب: طول أ ب ، ب ج ، أ ج

نثبت أن: الطول الأكبر = مجموع الطولين الآخرين



**مثال ١**

اثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط  
أ (٥، -٥) ، ب (-٧، ١) ، ج (١٥، ١٥)  
قائم الزاوية فى ب ، ثم أوجد مساحته

**الحل**

$$أب = \sqrt{(٥ - (-٧))^2 + (-٥ - ١)^2} = \sqrt{١٢^2 + (-٦)^2} = \sqrt{١٨٠}$$

$$بج = \sqrt{(١٥ - (-٧))^2 + (١٥ - ١)^2} = \sqrt{٢٢^2 + ١٤^2} = \sqrt{٣٢٠}$$

$$أج = \sqrt{(١٥ - ٥)^2 + (١٥ - (-٥))^2} = \sqrt{١٠^2 + ٢٠^2} = \sqrt{٥٠٠}$$

$$(أج)^2 = ٥٠٠$$

$$(أب)^2 + (بج)^2 = ١٨٠ + ٣٢٠ = ٥٠٠$$

$$\therefore (أج)^2 = (أب)^2 + (بج)^2 \therefore \text{المثلث قائم فى ب}$$

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{ع}$$

$$١٢٠ = \frac{٣٢٠ \sqrt{2} \times ١٨٠ \sqrt{2}}{2}$$

**مثال ٢**

بين نوع المثلث الذى رؤوسه النقط  
أ (٣، ٣) ، ب (١، ٥) ، ج (١، ٣)  
بالنسبة لأضلاعه

**الحل**

$$أب = \sqrt{(٣ - ١)^2 + (٣ - ٥)^2} = \sqrt{٢^2 + (-٢)^2} = \sqrt{٨}$$

$$بج = \sqrt{(٣ - ١)^2 + (٣ - ١)^2} = \sqrt{٢^2 + ٢^2} = \sqrt{٨}$$

$$أج = \sqrt{(٣ - ١)^2 + (٣ - ٣)^2} = \sqrt{٢^2 + ٠^2} = \sqrt{٤}$$

$$\therefore أب = بج$$

$\therefore \Delta$  متساوى الساقين

**مثال ٣**

اثبت باستخدام البعد أن النقط  
أ (-٣، ١) ، ب (٦، ٥) ، ج (٣، ٣)  
تقع على استقامة واحدة

**الحل**

$$أب = \sqrt{(-٣ - ٦)^2 + (١ - ٥)^2} = \sqrt{٩^2 + (-٤)^2} = \sqrt{٩٧}$$

$$بج = \sqrt{(٣ - ٦)^2 + (٣ - ٥)^2} = \sqrt{(-٣)^2 + (-٢)^2} = \sqrt{١٣}$$

$$أج = \sqrt{(-٣ - ٣)^2 + (١ - ٣)^2} = \sqrt{(-٦)^2 + (-٢)^2} = \sqrt{٤٠}$$

$$أب = ٩,٨١٧ ، بج + أج = ٩,٨١٧$$

$$\therefore أب = بج + أج$$

$\therefore$  النقط أ ، ب ، ج تقع على استقامة واحدة

**مثال ٤**

اثبت أن النقط أ (٣، -١) ، ب (-٤، ٦)  
، ج (-٢، ٢) الواقعة فى مستوى إحداثى متعامد تمر بها  
دائرة واحدة مركزها م (-١، ٢) ثم أوجد محيط الدائرة

**الحل**

$$أم = \sqrt{(٣ - (-١))^2 + (-١ - ٢)^2} = \sqrt{٤^2 + (-٣)^2} = \sqrt{٢٥}$$

$$بم = \sqrt{(-٢ - (-١))^2 + (٢ - ٢)^2} = \sqrt{(-١)^2 + ٠^2} = \sqrt{١}$$

$$جـم = \sqrt{(-٢ - ٢)^2 + (٢ - ٢)^2} = \sqrt{(-٤)^2 + ٠^2} = \sqrt{١٦}$$

$$\therefore أم = بم = جـم$$

$\therefore$  النقط تمر بها دائرة واحدة

$$\text{محيط الدائرة} = ٢\pi \times \text{نق} = ٢ \times ٣,١٤ \times ٥ = ٣١,٤$$

**مثال ٥**

أ ب ج د شكل رباعي حيث

أ (٣، ٥) ، ب (٢، ٦) ، ج (١، ١) ، د (٤، ٠)

اثبت أن الشكل أ ب ج د معين وأوجد مساحته

**الحل**

$$\overline{أب} = \sqrt{(٣-٢)^2 + (٥-٦)^2} = \sqrt{٢٦}$$

$$\overline{بج} = \sqrt{(٢-١)^2 + (٦-١)^2} = \sqrt{٢٦}$$

$$\overline{جـد} = \sqrt{(١-٤)^2 + (١-٠)^2} = \sqrt{٢٦}$$

$$\overline{أد} = \sqrt{(٣-٤)^2 + (٥-٠)^2} = \sqrt{٢٦}$$

∴ أ ب = ب ج = ج د = أ د ∴ الشكل معين

مساحة المعين =  $\frac{1}{2}$  حاصل ضرب طول قطريه

$$\overline{أج} = \sqrt{(٣-١)^2 + (٥-١)^2} = \sqrt{٣٢}$$

$$\overline{بـد} = \sqrt{(٢-٤)^2 + (٦-٠)^2} = \sqrt{٧٢}$$

$$\text{مساحة المعين} = \frac{1}{2} \times \overline{أج} \times \overline{بـد} = \frac{1}{2} \times \sqrt{٣٢} \times \sqrt{٧٢} = ٢٤$$

**مثال ٦**

أ ب ج د شكل رباعي حيث

أ (٤، ٢) ، ب (٠، ٣) ، ج (٥، ٧) ، د (٩، ٢)

اثبت أن الشكل أ ب ج د مربع وأوجد مساحته

**الحل**

$$\overline{أب} = \sqrt{(٤-٠)^2 + (٢-٣)^2} = \sqrt{٤١}$$

$$\overline{بج} = \sqrt{(٠-٥)^2 + (٣-٧)^2} = \sqrt{٤١}$$

$$\overline{جـد} = \sqrt{(٥-٩)^2 + (٧-٢)^2} = \sqrt{٤١}$$

$$\overline{أد} = \sqrt{(٤-٩)^2 + (٢-٢)^2} = \sqrt{٤١}$$

نحسب القطران أ ج ، ب د

$$\overline{أج} = \sqrt{(٤-٥)^2 + (٢-٧)^2} = \sqrt{٨٢}$$

$$\overline{بـد} = \sqrt{(٠-٩)^2 + (٣-٢)^2} = \sqrt{٨٢}$$

∴ أ ب = ب ج = ج د = أ د ، أ ج = ب د

∴ الشكل مربع

$$\text{مساحة المربع} = \overline{أب} \times \overline{أب} = \sqrt{٤١} \times \sqrt{٤١} = ٤١ \text{ وحدة طول مربعة}$$

**مثال ٧**

إذا كان بعد النقطة (س ، ٥) عن النقطة

(١، ٦) يساوى  $٢\sqrt{٥}$  فأوجد قيمة س

**الحل**

$$\text{البعد} = \sqrt{\text{فرق السينات}^2 + \text{فرق الصادات}^2}$$

$$\therefore (٢\sqrt{٥})^2 = (١-٥)^2 + (٦-س)^2$$

$$٤ \times ٥ = (٦-س)^2 + ١٦$$

$$٢٠ = (٦-س)^2 + ١٦ \quad \text{ننقل الـ ١٦}$$

$$٤ = (٦-س)^2$$

$$\text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين} \quad ٢ = ٦-س$$

$$\therefore ٨ = س$$

$$\text{أو } ٢-٦ = س \therefore س = -٤$$

**مثال ٨**

إذا كانت أ (س ، ٣) ، ب (٣ ، ٢) ،

ج (٥ ، ١) وكانت أ ب = ب ج فأوجد قيمة س

**الحل**

$$\overline{أب} = \sqrt{(٣-س)^2 + (٢-٣)^2} = \sqrt{١+٤} = \sqrt{٥}$$

∴ أ ب = ب ج

$$\therefore \overline{بج} = \sqrt{(٣-٥)^2 + (١-٣)^2} = \sqrt{٥} \quad \text{بتربيع الطرفين}$$

$$٥ = ١ + (٣-س)^2$$

$$(٣-س)^2 = ٤ \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$\therefore ٣-س = ٢ \quad \therefore س = ١$$

$$\text{أو } ٣-س = -٢ \quad \therefore س = ٥$$



١

أ ب ج مثلث فيه

أ (٨،٢) ، ب (٤،١) ، ج (١،٣)

بين نوع المثلث أ ب ج بالنسبة لزواياه

الحل

٢

إذا كانت النقط أ (٢،٣) ، ب (٤،٣)

، ج (-١،٢) ، د (-٣،٢) هي رؤوس معين

فأوجد مساحة المعين أ ب ج د

الحل

٣

اثبت أن النقط أ (-١،٤) ، ب (١،٠)

، ج (٢،٢) تقع على استقامة واحدة

الحل

٤

إذا كان البعد بين النقطتين أ (٧،٠) ، ب (٠،٣)

يساوى ٥ وحدات طول فأوجد قيمة أ

الحل



## أسئلة اختر على درس البعد

- ١) البعد بين النقطتين (٠،٥) ، (٠،٢) هو ..... وحدة طول  
 (أ) ٧ (ب) ٥ (ج)  $\sqrt{29}$  (د) ٣
- ٢) بعد النقطة (٢،-٤) عن محور السينات = .....  
 (أ) ٤ (ب) ٢ (ج) -٤ (د) ٦
- ٣) المسافة بين النقطة (٤،٣) والمحور الصادي هي ..... وحدة طول  
 (أ) ٥ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٧
- ٤) بعد النقطة (٣ ، ٤ ) عن نقطة الأصل = ..... وحدة طول  
 (أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٧ (د) ٥
- ٥) البعد العمودي بين المستقيمين س - ٢ = ٠ ، س + ٣ = ٠ يساوى .....  
 (أ) ١ (ب) ٥ (ج) ٢ (د) ٣
- ٦) البعد العمودي بين المستقيمين ص + ١ = ٠ ، ص + ٣ = ٠ يساوى .....  
 (أ) ٤ (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٥
- ٧) طول القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين (٠،٠) ، (١٢،٥) = ..... وحدة طول  
 (أ) ٥ (ب) ٧ (ج) ١٢ (د) ١٣
- ٨) طول نصف قطر الدائرة التي مركزها (٠ ، ٠) ، وتمر بالنقطة (٣ ، ٤) يساوى .....  
 (أ) ٧ (ب) ١ (ج) ١٢ (د) ٥
- ٩) البعد بين النقطة (٥ ، ظا ٦٠) ومحور السينات = .....  
 (أ) ٥ (ب)  $\sqrt{5}$  (ج) ٣ (د)  $\sqrt{3}$
- ١٠) طول القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين (٤،-١) ، (١٢،٥) = ..... وحدة طول  
 (أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ١٢ (د) ١٣
- ١١) إذا كان البعد بين النقطتين (٠،أ) ، (١،٠) هو وحدة طول فإن أ = .....  
 (أ) -١ (ب) ٠ (ج) ١ (د)  $1 \pm$
- ١٢) دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢ وحدة طول فأى من النقاط الآتية تنتمى للدائرة .....  
 (أ) (٢،١) (ب) (١،-٢) (ج)  $(1, \sqrt{3})$  (د)  $(1, \sqrt{2})$
- ١٣) النقط (٠،٠) ، (٠،٣) ، (٤،٠) تكون .....  
 (أ)  $\Delta$  حاد (ب)  $\Delta$  منفرج (ج)  $\Delta$  قائم (د) على استقامة واحدة

## تمارين على البعد بين نقطتين

١ إذا كانت أ (٨، ٢) ، ب (٤، ١) ، ج (١، ٣)

اثبت ان المثلث أ ب ج متساوي الساقين

٢ اثبت أن النقط أ (٣، ٥) ، ب (٢، ٣) ،

ج (٢، -٤) هي رؤوس مثلث

٣ بين نوع المثلث الذى رؤوسه النقط

أ (٣، ٠) ، ب (٤، ١) ، ج (١، ٢)

من حيث أطوال أضلاعه

٤ اثبت أن الشكل الذى رؤوسه النقط

أ (٣، ١) ، ب (١، ٥) ، ج (٤، ٧) ، د (٦، ١)

متوازي أضلاع

٥ أوجد مساحة المستطيل أ ب ج د حيث:

أ (٣، ١) ، ب (١، ٥) ، ج (٤، ٦) ، د (٦، ٠)

٦ اثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط

أ (٤، ١) ، ب (١، ٢) ، ج (٣، ٢)

قائم الزاوية في ب وأوجد مساحته

٧ إذا كان البعد بين النقطتين (أ، ٠) ، (١، ٠)

يساوى  $2\sqrt{2}$  وحدة طول فأوجد قيمة أ

٨ اثبت أن النقط أ (٣، ٤) ، ب (١، ١)

ج (٥، -٣) تقع على استقامة واحدة

٩ اثبت أن النقط أ (٠، ٢) ، ب (١، ٥)

ج (٦، ٦) الواقعة في مستوى إحداثى متعامد تمر بها دائرة مركزها (٢، -٣)

ثم أوجد محيط ومساحة الدائرة بدلالة  $\pi$

١٠ س ص ع ل معين رؤوسه س (٢، ٣) ،

ص (٤، -٣) ، ع (١، -٢) ، ل (٢، ٣)

أوجد مساحة سطحه

١١ أ ب ج د شكل رباعى حيث أ (٤، ٢)

ب (٣، ٤) ، ج (٣، -١) ، د (٢، -١)

اثبت أن الشكل أ ب ج د مربع وأوجد مساحة سطحه

١٢ أ ب ج د شكل رباعى حيث أ (٣، ١)

ب (٥، ١) ، ج (٦، ٤) ، د (٠، ٦)

اثبت أن الشكل أ ب ج د مستطيل

١٣ أ ب ج مثلث حيث أ (٣، ٥)

ب (٣، ٢) ، ج (٢، -٤)

بين نوع المثلث أ ب ج بالنسبة لزاياه

١٤ إذا كانت أ (٣، ٤) ، ب (١، ١) ، ج (٥، -٣)

بين هل النقط أ ، ب ، ج تقع على استقامة واحدة أم لا؟

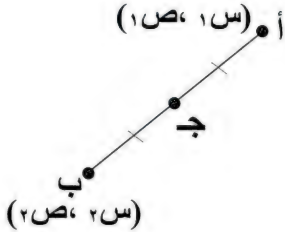
١٥ دائرة مركزها النقطه م (٧، ٤) وتمر بالنقطه

(٣، ١) احسب مساحة الدائرة



## إحداثى منتصف قطعة مستقيمة

إذا كانت النقطة أ (س١، ص١) ، النقطة ب (س٢، ص٢) فإنه يمكن حساب إحداثى نقطة منتصف أ ب بالقانون:



$$\text{إحداثى المنتصف} = \left( \frac{\text{مجموع السينات}}{٢}, \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right) = \left( \frac{\text{س١} + \text{س٢}}{٢}, \frac{\text{ص١} + \text{ص٢}}{٢} \right) =$$

## ملاحظات هامة

١) **الفكرة المباشرة:** يكون معلوم لديك إحداثى البداية والنهاية وتحسب إحداثى المنتصف (زى مثال ١)

٢) **الفكرة غير المباشرة:** يكون معلوم لديك إحداثى المنتصف والبداية وتحسب إحداثى النهاية (زى مثال ٢)  
أو يكون معلوم لديك إحداثى المنتصف والنهاية وتحسب إحداثى البداية

٣) **مجموع السينات** يقصد به سينات البداية والنهاية هي التي تجمع (إياك تجمع سينات المنتصف مع أي حاجة)

٤) **متوازي الأضلاع والمربع والمستطيل والمعين فيهم :** القطران ينصف كل منهما الآخر

٥) **مركز الدائرة هو منتصف القطر**

**مثال ٢** إذا كانت ج (٦، -٤) هي منتصف أ ب

حيث أ (٥، -٣) فأوجد إحداثى نقطة ب

**الحل**

نفرض أن ب (س، ص)

$$\text{إحداثى المنتصف} = \left( \frac{\text{مجموع السينات}}{٢}, \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$$

$$\therefore (٦، -٤) = \left( \frac{\text{س} + ٥}{٢}, \frac{\text{ص} + ٣}{٢} \right)$$

$$\begin{array}{l|l} ٦ = \frac{\text{س} + ٥}{٢} & -٤ = \frac{\text{ص} + ٣}{٢} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} ١٢ = \text{س} + ٥ & ٨ = \text{ص} + ٣ \end{array}$$

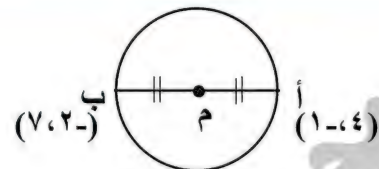
$$\begin{array}{l|l} \text{س} = ٧ & \text{ص} = ٥ \end{array}$$

∴ إحداثى ب = (٧، ٥)

**مثال ١** إذا كان أ ب قطر في الدائرة التي مركزها م

حيث أ (٤، -١) ، ب (٢، -٧) فأوجد إحداثى المركز م

**الحل**



م هي منتصف القطر أ ب

$$\text{إحداثى المنتصف} = \left( \frac{\text{مجموع السينات}}{٢}, \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$$

$$= \left( \frac{٢ + ٤}{٢}, \frac{-٧ + (-١)}{٢} \right) =$$

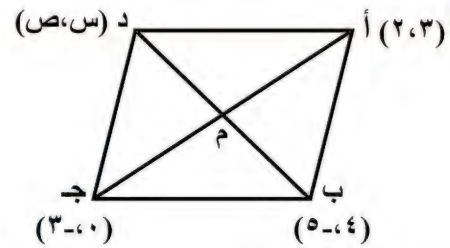
$$= \left( \frac{٦}{٢}, \frac{-٨}{٢} \right) = (٣، -٤)$$



مثال ٣

أ ب ج د متوازي أضلاع فيه  
أ (٢، ٣) ، ب (٤، ٥) ، ج (٠، ٣) أوجد إحداثي  
نقطة تقاطع قطريه ثم أوجد إحداثي نقطة د

الحل



نقطة تقاطع القطرين هي م منتصف أ ج

$$م \text{ منتصف } أ ج = \left( \frac{2+0}{2}, \frac{3+3}{2} \right) = \left( \frac{2}{2}, \frac{6}{2} \right) = (1, 3)$$

نفرض أن النقطة د هي (س، ص)

∴ منتصف أ ج = منتصف ب د

$$\left( \frac{2+0}{2}, \frac{3+3}{2} \right) = \left( \frac{4+س}{2}, \frac{3+ص}{2} \right)$$

المسقط الأول = المسقط الأول | المسقط الثاني = المسقط الثاني

$$\frac{2}{2} = \frac{4+س}{2}$$

$$1 = 4+س$$

$$س = -3$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3+ص}{2}$$

$$3 = 3+ص$$

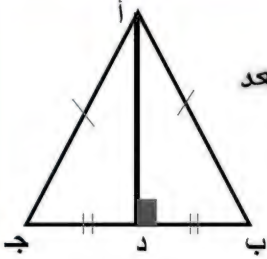
$$ص = 0$$

∴ إحداثي د = (-3، 0)

مثال ٤

اثبت أن النقط أ (٠، ٣) ، ب (٤، ٣)  
ج (٦، ١) هي رؤوس مثلث متساوي الساقين  
رأسه أ ، ثم أوجد طول القطعة المستقيمة المرسومة  
من أ وعمودية على ب ج

الحل



إثبات أن Δ متساوي الساقين بالبعد

حساب إحداثي د بالمنتصف

حساب طول أ د بالبعد

$$أ ب = \sqrt{(0-4)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$أ ج = \sqrt{(0-6)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$ب ج = \sqrt{(4-6)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$أ ب = 4$$

$$أ ج = 2\sqrt{10}$$

$$ب ج = 2\sqrt{2}$$

∴ أ ب = أ ج ∴ Δ متساوي الساقين

∴ أ د ⊥ ب ج ∴ د منتصف ب ج

$$د (منتصف ب ج) = \left( \frac{4+6}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = (5, 2)$$

$$أ (0, 3) ، د (5, 2)$$

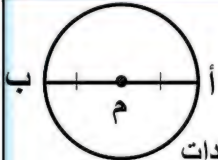
$$أ د = \sqrt{(0-5)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

$$\sqrt{26} = \text{وحدة طول}$$

٦

أ ب قطر في الدائرة التي مركزها م  
حيث ب (٨، ١) ، م (٥، ٧) فأوجد :  
(١) إحداثي النقطة أ (٢) طول نصف قطر الدائرة

الحل



مركز الدائرة م هو منتصف القطر أ ب

نفرض أن إحداثي أ = (س، ص)

$$\left( \frac{س+٨}{2}, \frac{ص+١}{2} \right) = (٥, ٧)$$

$$\left( \frac{س+٨}{2}, \frac{ص+١}{2} \right) = (٥, ٧)$$

$$٥ = \frac{س+٨}{2} \quad ٧ = \frac{ص+١}{2}$$

$$١٠ = س+٨ \quad ١٤ = ص+١$$

$$٢ = س \quad ٣ = ص$$

إحداثي أ = (٢، ٣)

$$\text{طول نصف القطر م ب} = \sqrt{(٥-٢)^2 + (٧-٣)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

٥

إذا كانت أ (-١، ١) ، ب (٢، ٣) ، ج (٦، ٠)  
د (٣، -٤) اثبت أن أ ج ، ب د ينصف كل منهما الآخر

الحل

$$\text{منتصف أ ج} = \left( \frac{-1+6}{2}, \frac{1+0}{2} \right) = \left( \frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{منتصف ب د} = \left( \frac{2+3}{2}, \frac{3+(-4)}{2} \right) = \left( \frac{5}{2}, \frac{-1}{2} \right)$$

∴ منتصف أ ج = منتصف ب د

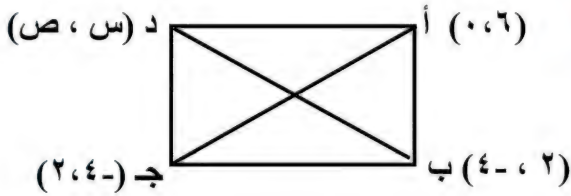
∴ أ ج ، ب د ينصف كل منهما الآخر

## مثال ٩

اثبت أن النقطة أ (٠، ٦) ، ب (٢، -٤) ، ج (-٢، ٤) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب ، ثم أوجد إحداثي نقطة د التي تجعل الشكل أ ب ج د مستطيلاً

## الحل

$$\begin{aligned} \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} &= \sqrt{(0-2)^2 + (6-4)^2} = \text{أ ب} \\ \sqrt{32} &= \sqrt{16 + 16} \\ \sqrt{26 + (-4)^2} &= \sqrt{(4-2)^2 + (-2-4)^2} = \text{ب ج} \\ \sqrt{72} &= \sqrt{36 + 36} \\ \sqrt{2^2 + (-10)^2} &= \sqrt{(0-2)^2 + (6-4)^2} = \text{أ ج} \\ \sqrt{104} &= \sqrt{4 + 100} \\ 104 &= 2(\text{أ ج}) \\ 104 &= 32 + 72 = 2(\text{ب ج}) + 2(\text{أ ب}) \\ \therefore \text{أ ج} &= 2(\text{أ ب}) + 2(\text{ب ج}) \therefore \text{المثلث قائم} \end{aligned}$$



$$\text{منتصف أ ج} = \left( \frac{0+2}{2}, \frac{4+6}{2} \right) = (1, 1)$$

نفرض أن د = (س، ص)

$$\begin{aligned} \text{منتصف ب د} &= \left( \frac{\text{مجموع السينات}}{2}, \frac{\text{مجموع الصادات}}{2} \right) \\ \left( \frac{\text{س} + 2}{2}, \frac{\text{ص} + 4}{2} \right) &= (1, 1) \end{aligned}$$

المسقط الأول = المسقط الأول | المسقط الثاني = المسقط الثاني

$$1 = \frac{\text{س} + 2}{2}$$

$$2 = \text{س} + 2$$

$$\text{ص} = 0$$

$$1 = \frac{\text{ص} + 4}{2}$$

$$2 = \text{ص} + 4$$

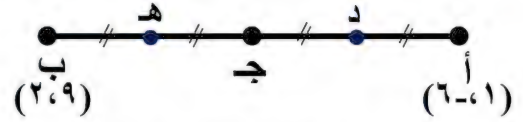
$$\text{س} = 0$$

$\therefore$  إحداثي د = (٠، ٦)

## مثال ٧

إذا كانت أ (٦، ١) ، ب (٢، ٩) فأوجد إحداثيات النقطة التي تقسم أ ب إلى أربعة أجزاء متساوية الطول

## الحل

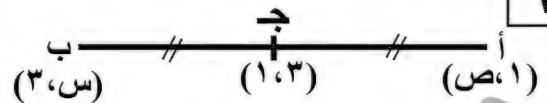


$$\begin{aligned} \text{إحداثي المنتصف} &= \left( \frac{\text{مجموع السينات}}{2}, \frac{\text{مجموع الصادات}}{2} \right) \\ \text{إحداثي ج (منتصف أ ب)} &= \left( \frac{6+2}{2}, \frac{1+9}{2} \right) = (4, 5) \\ \text{إحداثي د (منتصف أ ج)} &= \left( \frac{6+2}{2}, \frac{1+5}{2} \right) = (4, 3) \\ \text{إحداثي هـ (منتصف ب ج)} &= \left( \frac{2+4}{2}, \frac{9+5}{2} \right) = (3, 7) \end{aligned}$$

## مثال ٨

إذا كانت النقطة (١، ٣) في منتصف البعد بين النقطتين (٣، ص) ، (١، ١) فأوجد النقطة (س، ص)

## الحل



$$\begin{aligned} \text{إحداثي المنتصف} &= \left( \frac{\text{مجموع السينات}}{2}, \frac{\text{مجموع الصادات}}{2} \right) \\ \therefore \left( \frac{\text{س} + 3}{2}, \frac{\text{ص} + 1}{2} \right) &= (1, 3) \end{aligned}$$

$$1 = \frac{\text{س} + 3}{2}$$

$$2 = \text{س} + 3$$

$$\text{س} = -1$$

$$3 = \frac{\text{ص} + 1}{2}$$

$$6 = \text{ص} + 1$$

$$\text{ص} = 5$$

$\therefore$  (س، ص) = (-١، ٥)



١ أ ب ج د متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م  
حيث أ (١، -٣) ، ج (١، ٧)  
أوجد إحداثي نقطة م

الحل

٢ إذا كانت النقطة أ (٢، ٣) هي منتصف ب ج  
حيث ج (-١، ٣) فأوجد إحداثي نقطة ب

الحل

٣ إذا كانت ج (س ، -٣) منتصف أ ب بحيث  
أ (-٣، ص) ، ب (٩، ١١) فأوجد قيمة س + ص

الحل

٤ إذا كان أ ب قطر في الدائرة م حيث أ (٤ ، -١) ،  
ب (-٢ ، ٧) فأوجد إحداثي مركز الدائرة م  
وطول نصف قطر الدائرة

الحل



## أسئلة اختر على درس المنتصف

- ١ إذا كانت أ (٩،١-) ، ب (١-،١-) فإن إحداثي منتصف  $\overline{AB}$  هو .....  
 (أ) (٠،٤) (ب) (٤،٠) (ج) (٩،١) (د) (٤،١-)
- ٢ إذا كان  $\overline{AB}$  قطر في دائرة م حيث أ (٥-، ٣) ، ب (١، ٥) فإن مركز الدائرة م هو .....  
 (أ) (٢-،٤-) (ب) (٢-،٤) (ج) (٢،٢) (د) (٢-،٨)
- ٣ إذا كان  $\overline{AB}$  جـ د مربع ، أ (٤،٣) ، جـ (٦،٥) فإن إحداثي نقطة تقاطع قطريه = .....  
 (أ) (١٠،٨) (ب) (٨،١٠) (ج) (٥،٤) (د) (٢٤،١٥)
- ٤ إذا كانت (٢،٣) منتصف  $\overline{AB}$  حيث أ (٢-،٣) فإن إحداثي ب هو .....  
 (أ) (٦،٣) (ب) (٠،٠) (ج) (٦،٠) (د) (٥،١)
- ٥ إذا كانت جـ (٣-،ص) منتصف  $\overline{AB}$  حيث أ (٦-،س) ، ب (٨-،١) فإن س + ص = .....  
 (أ) ١١- (ب) ١١ (ج) ١٨- (د) ١٤-
- ٦ إذا كانت (١،٢) تنصف البعد بين النقطتين (٤-،٣) ، (٦،س) فإن س = .....  
 (أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ١- (د) ١

## تمارين على إحداثي المنتصف

١ أوجد إحداثي نقطة منتصف  $\overline{AB}$  حيث

أ (٤، ٢) ، ب (٦، صفر)

٢ إذا كانت النقطة جـ (١، ٣) هي منتصف البعد

بين النقطتين أ (١، ص) ، ب (٣، س)

فأوجد النقطة (س، ص)

٣  $\overline{AB}$  جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطراه في هـ

حيث أ (١-،٣) ، ب (٢،٦) ، جـ (٧،١)

أوجد إحداثي كل من النقطتين هـ ، د

٤  $\overline{AB}$  قطر في الدائرة التي مركزها م فإذا كانت

ب (١١،٨) ، م (٧،٥) فأوجد

(١) إحداثي نقطة أ محيط الدائرة بدلالة  $\pi$

٥  $\overline{AB}$  جـ د مستطيل فيه:

أ (١-،٣) ، ب (٥، ١) ، جـ (٦، ٤) فأوجد:

(١) إحداثي نقطة د

(٢) مساحة المستطيل  $\overline{AB}$  جـ د

٦ اثبت أن النقط أ (٣،٥) ، ب (٢-،٣) ، جـ (٤-،٢-)

هي رؤوس مثلث منفرج الزاوية في ب

ثم أوجد إحداثي نقطة د التي تجعل  $\overline{AB}$  جـ د معين

وأوجد مساحة سطحه

٧  $\overline{AB}$  جـ د متوازي أضلاع فيه أ (٤،٣) ،

ب (١-،٢) ، جـ (٤-، ٣-) أوجد إحداثي د

خذ هـ أ د حيث أ هـ = ٢ أ د

## ميل الخط المستقيم

يرمز للميل بالرمز  $m$  ويمكن حسابه بالقوانين التالية :  
(حسب المعطى في المسألة تختار القانون المناسب)

٢ إذا كان المستقيم يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها  $\theta$



$$m = \tan \theta$$

١ إذا كان المستقيم يمر بنقطتين  $(x_1, y_1)$  ،  $(x_2, y_2)$  فإن:

$$m = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

٤ إذا كان للمستقيم معادلة على الصورة  $ax + by + c = 0$  (ص لوحدھا)

$$m = -\frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$$

٣ إذا كان للمستقيم معادلة على الصورة  $ax + by + c = 0$  (س ، ص مع بعض)

$$m = -\frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$$

تصنيف  
معلم رياضيات  
محمود عوض

## ملاحظات هامة

١ تعريف الميل: هو ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

٢ إذا كان المستقيم يمر بنقطتين ويوازي محور الصادات فإن: السينات تكون متساوية

مثال: إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين  $(3, 5)$  ،  $(4, 3)$  ويوازي محور الصادات فإن  $m = 3$

٣ إذا كان المستقيم يمر بنقطتين ويوازي محور السينات فإن: الصادات تكون متساوية

مثال: إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين  $(2, -4)$  ،  $(6, -4)$  ويوازي محور السينات فإن  $m = -4$

٤ المستقيم الموازي لمحور السينات ميله = صفر ، بينما الموازي لمحور الصادات ميله غير معرف

٥ إذا كان المستقيم يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يكون الميل موجب

إذا كان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يكون الميل سالب

٦ يمكن قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم مع محور السينات بمعلومية الميل:  $\text{الميل} \rightarrow \tan \rightarrow \text{shift}$



## تدريبات على حساب الميل

**٢** أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها  $30^\circ$

الحل

$$\text{الميل م} = \text{ظا ه} = \text{ظا } 30^\circ =$$

**١** أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين  $(3, 6)$  ،  $(1, 2)$

الحل

$$\text{الميل م} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{6 - 2}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$$

**٤** أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته

$$2\text{ص} = 6\text{س} + 1$$

الحل

$$\text{الميل م} = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{6}{2} = 3$$

**٣** أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته

$$4\text{س} - 7\text{ص} = 1$$

الحل

$$\text{الميل م} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$$

**٦** أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها  $45^\circ$

الحل

**٥** أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين  $(5, 3)$  ،  $(1, -4)$

الحل

**٨** أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته

$$3\text{ص} = 2\text{س} - 1$$

الحل

**٧** أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته

$$5\text{ص} + 2\text{س} = 3$$

الحل

**متفوقين** أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته

$$5 = \frac{\text{ص}}{3} + \frac{\text{س}}{2} \quad (\text{بطريقتين})$$

الحل

**٩** إذا كانت ب  $(3, 5)$  ، ج  $(-1, 7)$  فأوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها ب ج مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

$$\text{ميل ب ج} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{5 - 7}{3 - (-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{م} = \text{ظا ه} \quad \therefore \text{ظا ه} = 1 \quad \therefore \text{ق (ه)} = 45^\circ$$



## العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين

إذا كان المستقيمان متعامدان فإن:

$$m_1 \times m_2 = -1 \text{ أو } m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

لإثبات أن المستقيمان متعامدان :

$$\text{نثبت أن: } m_1 \times m_2 = -1$$

أو ميل = صفر والميل الآخر غير معرف

لو عندك مستقيمين متعامدين وعايز قيمة مجهول:

$$\text{نحسب: } m_1, m_2$$

ثم نساوى : الميل المجهول = - شقلوب المعلوم

## العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين

إذا كان المستقيمان متوازيان فإن:

$$\text{ميل الأول} = \text{ميل الثانى}$$

$$m_1 = m_2$$

لإثبات أن المستقيمان متوازيان :

$$\text{نحسب: } m_1, m_2 \text{ ونثبت أن: } m_1 = m_2$$

لو عندك مستقيمين متوازيين وعايز قيمة مجهول:

$$\text{نحسب: } m_1, m_2$$

ثم نساوى : الميل المجهول = الميل المعلوم

$$\text{إذا كان ميل مستقيم} = \frac{3}{4} \text{ فإن ميل الموازى له} = \frac{3}{4}$$

$$\text{إذا كان ميل مستقيم} = -2 \text{ فإن ميل الموازى له} = -2$$

$$\text{إذا كان ميل مستقيم} = \frac{3}{4} \text{ فإن ميل العمودى عليه} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{إذا كان ميل مستقيم} = -1 \text{ فإن ميل العمودى عليه} = 1$$

**مثال ٢** اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين

$(-3, 4)$  ،  $(2, -3)$  عمودى على المستقيم

المار بالنقطتين  $(1, 2)$  ،  $(3, 2)$

**مثال ١** اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين

$(2, -1)$  ،  $(6, 3)$  يوازى المستقيم الذى يصنع مع

الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها  $45^\circ$

**الحل**

$$m_1 = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{2 - 4}{3 - (-3)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$m_2 = \frac{2 - 2}{1 - 3} = \frac{0}{-2} = 0 \text{ صفر}$$

∴ المستقيمان متعامدان

**الحل**

$$m_1 = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{3 - (-1)}{6 - 2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$m_2 = \tan 45^\circ = 1$$

∴  $m_1 = m_2$  ∴ المستقيمان متوازيان

**مثال ١**

اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين  
(٣، ٢) ، (٠، ٠) يوازي المستقيم المار بالنقطتين  
(٧، ١) ، (٤، ١-)

**الحل**

$$١م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٣ - ٠}{٢ - ٠} = \frac{٣}{٢}$$

$$٢م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٤ - ٧}{١ - ١-} = \frac{٣}{٢}$$

∴ المستقيمان متوازيان ١م = ٢م

**مثال ٢**

أوجد ميل المستقيم العمودي على  
المستقيم المار بالنقطتين (٣، ٢-) ، (٥، ١)

**الحل**

$$٢م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٢ - ١}{٣ - ٥} = \frac{١}{٢}$$

∴ المستقيمان متعامدان

$$١م = \frac{١}{٢م} = ١م$$

**مثال ٣**

اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين  
(٣، ١-) ، (٤، ٢) يوازي المستقيم  
٣ص - س - ١ = ٠

**الحل**

$$١م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٣ - ٤}{١ - ٢} = \frac{١}{٣}$$

$$٢م = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{١}{٣}$$

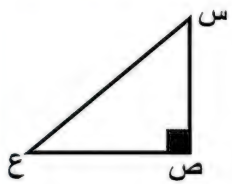
∴ المستقيمان متوازيان ١م = ٢م

**مثال ٤**

إذا كان المثلث الذي رؤوسه النقط  
ص (٢، ٤) ، س (٥، ٣) ، ع (٥، ١-) قائم الزاوية في ص فأوجد قيمة أ

**الحل**

∴ قائم في ص ∴ س ص ⊥ ص ع



$$\text{ميل س ص} = \frac{٣ - ٥}{٢ - ٤} = \frac{٢}{٢} = ١$$

$$\text{ميل ص ع} = \frac{١ - ٢}{٥ - ٢} = \frac{١-}{٣}$$

∴ س ص ⊥ ص ع ∴ ١م × ١م = ١-

$$\frac{١}{٣} = \frac{١-}{٢} \quad \therefore ١- = ٢ \quad \therefore ١ = ٣$$

**مثال ٥**

إذا كان المستقيم ل يمر بالنقطتين  
(٣، ١) ، (٢، ك) والمستقيم ل يصنع زاوية قياسها ٤٥°  
فأوجد قيمة ك إذا كان ل // ل٢

**الحل**

$$١م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{١ - ك}{٣ - ٢} = \frac{١ - ك}{١}$$

$$٢م = \text{ظا هـ} = \text{ظا ٤٥} = ١$$

∴ المستقيمان متوازيان ∴ ١م = ٢م

$$\frac{١ - ك}{١} = ١ \quad (\text{مقص}) \quad \therefore ١ - ك = ١$$

$$\therefore ك = ٠$$

**مثال ٦**

إذا كان المستقيم ل يمر بالنقطتين  
(٣، ١) ، (٢، ك) والمستقيم ل يصنع زاوية قياسها ٤٥°  
فأوجد قيمة ك إذا كان ل ⊥ ل٢

**الحل**

$$١م = \frac{١ - ك}{٣ - ٢} = \frac{١ - ك}{١} \quad \text{ظا هـ} = ١ = ٢م$$

∴ المستقيمان متعامدان ∴ ١م = ٢م

المجهول = شقلوب المعلوم

$$\frac{١ - ك}{١} = ١ \quad \therefore ١ - ك = ١$$

$$\therefore ك = ٠$$



١ اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين  $(-1, 4)$  ،  $(3, 5)$  يوازي المستقيم الذى معادلته  $4x - 3y - 9 = 0$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٢ اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين  $(2, 5)$  ،  $(3, 4)$  عمودى على المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها  $30^\circ$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٣ إذا كان المستقيمان ل :  $3x - 4y - 3 = 0$  ، ل :  $4x + 3y - 8 = 0$  متعامدين فأوجد قيمة أ

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٤ إذا كان المستقيم الذى معادلته  $3x + 2y - 6 = 0$  يوازي المستقيم الذى معادلته  $6x + 3y - 3 = 0$  فأوجد قيمة ك

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



## إثباتات هامة باستخدام الميل

### إثبات أن: $\Delta$ أ ب ج قائم في ب

نحسب: ميل أ ب ، ب ج (المتعامدان)  
نثبت أن: ميل أ ب  $\times$  ميل ب ج = - ١

### إثبات أن: النقط تقع على استقامة واحدة

نحسب أي ميلين ونثبت أنهما متساويان  
مثل: ميل أ ب = ميل ب ج

### إثبات أن: الشكل أ ب ج د شبه منحرف

نثبت أن: ضلعان متوازيان وضلعان غير متوازيان  
أي أن: ميل ب ج = ميل أ د ، ميل أ ب  $\neq$  ميل ج د

### إثبات أن: الشكل أ ب ج د معين

- ١- نثبت أنه متوازي أضلاع
- ٢- القطران متعامدان : ميل أ ج  $\times$  ميل ب د = - ١

### إثبات أن: الشكل أ ب ج د متوازي أضلاع

نثبت أن: كل ضلعان متقابلان متوازيان  
أي أن: ميل أ ب = ميل ج د  $\therefore$  أ ب // ج د  
ميل ب ج = ميل أ د  $\therefore$  ب ج // أ د

### إثبات أن: الشكل مربع

- ١- نثبت أنه متوازي أضلاع
- ٢- ضلعان متجاوران متعامدان
- ٣- القطران متعامدان

### إثبات أن: الشكل مستطيل

- ١- نثبت أنه متوازي أضلاع
- ٢- ضلعان متجاوران متعامدان كالتالي:  
ميل أ ب  $\times$  ميل ب ج = - ١

## مثال ١

اثبت أن النقط أ (١، -٣) ، ب (٥، ٦) ، ج (٣، ٣) تقع على استقامة واحدة

## الحل

$$\text{ميل أ ب} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٦ - (-٣)}{٥ - ١} = \frac{٩}{٤}$$

$$\text{ميل ب ج} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٣ - ٦}{٣ - ٥} = \frac{-٣}{-٢} = \frac{٣}{٢}$$

$$\therefore \text{ميل أ ب} = \text{ميل ب ج}$$

$\therefore$  النقط تقع على استقامة واحدة

## مثال ٢

إذا كانت النقط (١، ٠) ، (٣، ١) ، (٥، ٢) تقع على استقامة واحدة فأوجد قيمة أ

## الحل

نحسب الميل من النقط (١، ٠) والنقط (٣، ١)

$$\text{ميل أ ب} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{١ - ٠}{٣ - ١} = \frac{١}{٢}$$

نحسب الميل من النقط (١، ٠) والنقط (٥، ٢)

$$\text{ميل ب ج} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٢ - ٠}{٥ - ١} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \text{النقط تقع على استقامة واحدة} \therefore \text{ميل أ ب} = \text{ميل ب ج}$$

$$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٤} \therefore ١ = ٢$$

## مثال ٣

اثبت باستخدام الميل أن النقط أ (١، -٣) ، ب (٥، ٦) ، ج (٣، ٣) هي رؤوس مستطيل

## الحل

$$\text{ميل أ ب} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٦ - (-٣)}{٥ - ١} = \frac{٩}{٤}$$

$$\text{ميل ب ج} = \frac{٣ - ٦}{٣ - ٥} = \frac{-٣}{-٢} = \frac{٣}{٢}$$

$$\text{ميل ج د} = \frac{٠ - ٣}{١ - ٣} = \frac{-٣}{-٢} = \frac{٣}{٢}$$

$$\text{ميل أ د} = \frac{٠ - (-٣)}{١ - ٥} = \frac{٣}{-٤} = -\frac{٣}{٤}$$

$$\therefore \text{ميل أ ب} = \text{ميل ج د} \therefore \text{أ ب} \parallel \text{ج د}$$

$$\therefore \text{ميل ب ج} = \text{ميل أ د} \therefore \text{ب ج} \parallel \text{أ د}$$

$\therefore$  الشكل متوازي أضلاع

لإثبات أنه مستطيل نثبت أن ضلعان متجاوران متعامدان

$$\therefore \text{ميل أ ب} \times \text{ميل ب ج} = \frac{٩}{٤} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٢٧}{٨} \neq ٠$$

$$\therefore \text{أ ب} \perp \text{ب ج} \therefore \text{الشكل مستطيل}$$

## مثال ٣

اثبت باستخدام الميل أن النقط أ (٣، ٥) ، ب (٦، ٢) ، ج (١، -١) ، د (٠، -٤) هي رؤوس معين

## الحل

$$\text{ميل أ ب} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٢ - ٥}{٦ - ٣} = \frac{-٣}{٣} = -١$$

$$\text{ميل ب ج} = \frac{٠ - ٢}{١ - ٦} = \frac{-٢}{-٥} = \frac{٢}{٥}$$

$$\text{ميل ج د} = \frac{٠ - ٢}{٠ - ١} = \frac{-٢}{-١} = ٢$$

$$\text{ميل أ د} = \frac{٠ - ٥}{٠ - ٣} = \frac{-٥}{-٣} = \frac{٥}{٣}$$

$$\therefore \text{ميل أ ب} = \text{ميل ج د} \therefore \text{أ ب} \parallel \text{ج د}$$

$$\therefore \text{ميل ب ج} = \text{ميل أ د} \therefore \text{ب ج} \parallel \text{أ د}$$

$\therefore$  الشكل متوازي أضلاع

لإثبات أنه معين نثبت أن القطران متعامدان

$$\text{ميل أ ج} = \frac{٠ - ٥}{١ - ٣} = \frac{-٥}{-٢} = \frac{٥}{٢}$$

$$\text{ميل ب د} = \frac{٠ - ٢}{٠ - ٦} = \frac{-٢}{-٦} = \frac{١}{٣}$$

$$\therefore \text{ميل أ ج} \times \text{ميل ب د} = \frac{٥}{٢} \times \frac{١}{٣} = \frac{٥}{٦} \neq ٠$$

$$\therefore \text{القطران متعامدان} \therefore \text{الشكل معين}$$



١

اثبت أن النقط أ (١،٥) ، ب (٣،٧) ، ج (١،٣) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

الحل

٢

أ ب ج د شكل رباعي حيث أ (-١،١) ، ب (٥،٠) ، ج (٦،٥) ، د (٢،٤) فاثبت أن الشكل أ ب ج د متوازي أضلاع

الحل

٣

اثبت أن النقاط أ (٣،٢) ، ب (٢،٦) ، ج (١،٠) ، د (-١،٢) تكون رؤوس شبه المنحرف

الحل

٤

اثبت باستخدام الميل أن النقط أ (٠،٦) ، ب (-٢،٤) ، ج (-٤،٢) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب

الحل

## أَسْئَلَة اختَر على درس الميل

- ١ ميل المستقيم الموازي لمحور السينات = .....  
 (أ) -١ (ب) **صفر** (ج) ١ (د) غير معرف
- ٢ ميل المستقيم الذي معادلته ٣ س - ٤ ص + ١٢ = ٠ هو .....  
 (أ)  $-\frac{4}{3}$  (ب)  $-\frac{3}{4}$  (ج)  $\frac{4}{3}$  (د)  $\frac{3}{4}$
- ٣ المستقيم الذي معادلته ٣ ص = ٢ س + ٦ ميله = .....  
 (أ) ٢ (ب)  $-\frac{3}{2}$  (ج)  $-\frac{2}{3}$  (د)  $\frac{3}{2}$
- ٤ إذا كان أ ب // ج د وكان ميل أ ب = ٠,٧٥ فإن ميل ج د = .....  
 (أ)  $\frac{3}{4}$  (ب)  $\frac{4}{3}$  (ج) ٠,٢٥ (د) ٠,٥٧
- ٥ إذا كان أ ب  $\perp$  ج د ، وكان ميل أ ب =  $\frac{2}{3}$  فإن ميل ج د = .....  
 (أ)  $\frac{3}{2}$  (ب)  $-\frac{3}{2}$  (ج)  $\frac{2}{3}$  (د)  $\frac{4}{9}$
- ٦ أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، فيه أ (٣، -٤) ، ب (١، -٢) فإن ميل ب ج = .....  
 (أ) -٣ (ب) ٣ (ج)  $\frac{1}{3}$  (د)  $-\frac{1}{3}$
- ٧ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (١، ص) ، (٣، ٤) ميله يساوي ظا ٥ فإن ص = .....  
 (أ) ١ (ب) ٤ (ج) -١ (د) **٢**
- ٨ إذا كان ميل المستقيم أ س - ص + ٥ = ٠ يساوي ٣ فإن قيمة أ = .....  
 (أ) ٥ (ب) -٥ (ج) ١ (د) ٣
- ٩ إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما  $\frac{3}{2}$  ،  $\frac{6}{5}$  متوازيان فإن ك = .....  
 (أ) ٦ (ب) -٤ (ج)  $\frac{3}{2}$  (د) ٢
- ١٠ إذا كان المستقيمان س + ص = ٥ ، ك س + ٢ ص = ٠ متعامدين فإن ك = .....  
 (أ) **٢-** (ب) -١ (ج) ١ (د) ٢
- ١١ إذا كان ج د يوازي محور الصادات حيث ج (٤، ٤) ، د (٥، ٧) فإن ك = .....  
 (أ) ٥ (ب) ٧ (ج) **٥-** (د) ٤
- ١٢ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين أ (٨، ٣) ، د (٢، ك) يوازي محور السينات فإن ك = .....  
 (أ) ١ (ب) ٣ (ج) ٦ (د) ٨
- ١٣ إذا كان المستقيم ل س - ٥ ص + ٧ = صفر يوازي محور السينات فإن ل = .....  
 (أ) **صفر** (ب) ١ (ج) ٥ (د) ٧



## تمارين على ميد الخط المستقيم

١ اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٥،٠) ،

(٢،٣) عمودى على المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه

الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

٢ اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢،٣) ،

(٥،٤) يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية ٤٥° مع

الاتجاه الموجب لمحور السينات

٣ اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٣،١) ، (٤،٢)

يوازى المستقيم الذى معادلته ص - س = ٥

٤ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها أ ب

مع الاتجاه السالب لمحور السينات حيث

أ (٢، ٣) ، ب (١، ٦)

٥ إذا كان المستقيم الذى معادلته أ س + ٢ ص - ٧ = ٠

يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥°

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فأوجد قيمة أ

٦ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٣، ٢) ،

(١، ك) عموديا على مستقيم ميله - ٣

فأوجد قيمة ك

٧ إذا كانت معادلتى المستقيمين ل١ ، ل٢ هما على الترتيب:

٢ س - ٣ ص + ١ = ٠ ، ٣ س + ب ص - ٦ = ٠

فأوجد قيمة ب التى تجعل:

ل١ // ل٢ ، ل١ ⊥ ل٢

٨ اثبت أن النقط أ (٣،٤) ، ب (١،١) ، ج (-٥،٣)

تقع على استقامة واحدة

٩ اثبت أن النقط أ (-٥،٢) ، ب (٣،٢) ،

ج (-٢،٤) ليست على استقامة واحدة

١٠ اثبت أن الشكل الرباعى أ ب ج د الذى رؤوسه

أ (-٣،١) ، ب (١،٥) ، ج (٤،٧) ، د (٦،١)

متوازى أضلاع

١١ أ ب ج د شكل رباعى حيث :

أ (٢،٣) ، ب (-٣،٤) ، ج (-١،٢) ، د (-٣،٢)

اثبت باستخدام الميل أن الشكل أ ب ج د معين

١٢ اثبت باستخدام الميل أن المثلث الذى رؤوسه

أ (٤،١) ، ب (-١،٢) ، ج (-٣،٢)

قائم الزاوية في ب

١٣ إذا كانت أ (١، ٠) ، ب (-١، ٤)

، ج (٧، ٨) ، د (٩، ٤) فاثبت أن

الشكل أ ب ج د مستطيل

١٤ أ ب ج د شكل رباعى حيث :

أ (٤، ٢) ، ب (-٣، ٤) ، ج (-٣، ١) ، د (٢، ١)

اثبت باستخدام الميل أن الشكل أ ب ج د مربع

## معادلة الخط المستقيم

يمكن إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية: ① الميل ② طول الجزء المقطوع من محور الصادات

$$ص = م س + ج$$

وتكون المعادلة على الصورة:

**مثال ٢** أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله  $\frac{1}{3}$

ويقطع من محور الصادات جزءا سالبا طوله ٣ وحدات

**الحل**

$$ص = م س + ج$$

$$م = \frac{1}{3} ، ج = -٣$$

$$المعادلة هي: ص = \frac{1}{3} س - ٣$$

**مثال ١** أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله ٣ ويقطع

من محور الصادات جزءا موجبا طوله ٥ وحدات

**الحل**

$$ص = م س + ج$$

$$م = ٣ ، ج = ٥$$

$$المعادلة هي: ص = ٣ س + ٥$$

## ملحوظة عند حساب قيمة ج

لحساب الجزء المقطوع لازم يكون معاك: ① ميل المستقيم المطلوب معادلته

② زوج مرتب يمر به المستقيم المطلوب معادلته (خذ منه قيمة س ، ص)

**مثال ٢** أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين

(٦ ، ١) ، (٣ ، ٢)

**الحل**

$$ص = م س + ج$$

$$م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{١ - ٢}{٦ - ٣} = \frac{٣}{١} = ٣$$

من الزوج (٣، ٢) نأخذ س = ٢ ، ص = ٣

$$٣ = ٢ + ٣ ج$$

$$٩ = ٦ + ج$$

$$المعادلة هي: ص = ٣ س + ٣$$

**مثال ١** أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله  $\frac{1}{5}$

ويمر النقطة (٣ ، ٥)

**الحل**

$$ص = م س + ج ، م = \frac{1}{5}$$

من الزوج (٣، ٥) نعوض عن س = ٥ ، ص = ٣

$$٣ = ٥ \times \frac{1}{5} + ج$$

$$٣ = ١ + ج$$

$$المعادلة هي: ص = \frac{1}{5} س + ٢$$



## مثال ٣

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣، ١)، (٣، -١)  
ثم أثبت أنه يمر بنقطة الأصل

## الحل

$$ص = م س + ج$$

$$م = \frac{١-}{٣-} = \frac{٣-}{١-} = ٣$$

من (٣، ١) بالتعويض عن : س = ١ ، ص = ٣ ، م = ٣

$$٣ + ١ \times ٣ = ٣ \quad ج + ٣ = ٣$$

$$ج = ٠$$

∴ المعادلة هي : ص = ٣ س

لإثبات أنه يمر بنقطة الأصل نعوض عن س = ٠

$$∴ ص = ٠ \times ٣ = ٠ ∴ يمر بنقطة الأصل$$

## مثال ٤

أوجد معادلة المستقيم الذي ميله ٢  
ويمر بالنقطة (١، ٠)

## الحل

$$ص = م س + ج$$

من الزوج المرتب (١، ٠)

نعوض عن س = ١ ، ص = ٠

$$٠ = ٢ \times ١ + ج$$

$$٠ = ٢ + ج$$

$$∴ ج = -٢$$

∴ المعادلة هي : ص = ٢ س - ٢

### تصميم محمود عوض م

معلم رياضيات

## مثال ٥

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة

$$(٣، -٥) \text{ ويوازي المستقيم } ص + ٢ = ٧$$

## الحل

$$ص = م س + ج$$

$$م = \frac{١-}{٢-} = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$$

$$\frac{١-}{٢-} = م \quad \text{المستقيمان متوازيان}$$

بالتعويض عن س = ٣ ، ص = -٥ ، م =  $\frac{١-}{٢-}$

$$-٥ = \frac{١-}{٢-} \times ٣ + ج \quad ج + \frac{٣-}{٢-} = -٥$$

$$ج = -٥ - \frac{٣-}{٢-} = \frac{٧-}{٢-}$$

$$∴ المعادلة هي : ص = \frac{١-}{٢-} س + \frac{٧-}{٢-}$$

## مثال ٦

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، ٤)

وعمودى على المستقيم ٥ س - ٢ ص + ٧ = ٠

## الحل

$$ص = م س + ج$$

$$م = \frac{٥-}{٢-} = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$$

$$\frac{٢-}{٥-} = م \quad ∴ \text{المستقيمان متعامدان}$$

بالتعويض عن س = ٣ ، ص = ٤ ، م =  $\frac{٢-}{٥-}$

$$٤ = \frac{٢-}{٥-} \times ٣ + ج \quad ج + \frac{٦-}{٥-} = ٤$$

$$ج = ٤ - \frac{٦-}{٥-} = \frac{٢٦}{٥}$$

$$∴ المعادلة هي : ص = \frac{٢-}{٥-} س + \frac{٢٦}{٥}$$

## مثال ٧

مستقيم ميله  $\frac{1}{4}$  ويقطع من محور الصادات جزءا طوله وحدتان أوجد :  
(١) معادلة المستقيم (٢) نقطة تقاطعه مع محور السينات

## الحل

$$ص = م س + ج$$

$$م = \frac{1}{4} ، ج = 2$$

$$\therefore \text{المعادلة هي: } ص = \frac{1}{4} س + 2$$

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات

نعوض في المعادلة عن ص = ٠

$$0 = \frac{1}{4} س + 2$$

$$\frac{1}{4} س = -2$$

$$س = -2 \times 4 = -8$$

$\therefore$  نقطة التقاطع مع محور السينات هي  $(-8, 0)$

## مثال ٨

أوجد معادلة المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها  $135^\circ$  ويقطع جزءا موجبا من محور الصادات طوله ٥ وحدات

## الحل

$$ص = م س + ج$$

$$م = \tan 135^\circ$$

$$= -1$$

حسبناها باستخدام الآلة الحاسبة

$$ج = 5$$

معادلة المستقيم هي:

$$ص = -س + 5$$

### تصميم محمود عوض م

معلم رياضيات

## مثال ٩

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة  $(2, 1)$  وعمودى على المستقيم المار بالنقطتين  $A(3, 2)$  ،  $B(5, -4)$

## الحل

$$\text{ميل } AB = \frac{-4 - 2}{5 - 3} = -3$$

$$\therefore \text{المستقيمان متعامدان} \therefore م = 3$$

$\therefore$  المستقيم يمر بالنقطة  $(2, 1)$

بالتعويض عن  $س = 2$  ،  $ص = 1$  ،  $م = 3$

$$ص = م س + ج$$

$$1 = 3 \times 2 + ج$$

$$ج = 1 - 6 = -5$$

$\therefore$  المعادلة هي:  $ص = 3س - 5$

## مثال ١٠

أوجد معادلة المستقيم العمودى على  $AB$  من نقطة منتصفها حيث  $A(1, 3)$  ،  $B(3, 5)$

## الحل

$$م = \frac{3 - 5}{1 - 3} = 1$$

$\therefore$  المستقيمان متعامدان  $\therefore م = -1$

$$\text{منتصف } AB = \left( \frac{1+3}{2}, \frac{3+5}{2} \right) = (2, 4)$$

$\therefore$  المستقيم يمر بالنقطة  $(2, 4)$  نأخذ  $س = 2$  ،  $ص = 4$

$$ص = م س + ج$$

$$4 = -1 \times 2 + ج$$

$$ج = 6$$

$\therefore$  المعادلة هي:  $ص = -س + 6$



## مثال ١١

إذا كانت أ (٤، ٣-) ، ب (١، ٥-) ، ج (٥، ٣) فأوجد معادلة المستقيم المار بالرأس أ وينصف ب ج

## الحل



$$\text{منتصف ب ج} = \left( \frac{٥ + ١}{٢}, \frac{٣ + ٥}{٢} \right) = (٢, ٤)$$

∴ المستقيم يمر بالنقطة أ (٤، ٣-) وبمنتصف ب ج (٢، ٤)

$$\frac{٢-}{٧} = \frac{٤-}{٣-} = \frac{٢-}{٤-} = م ∴$$

∴ المستقيم يمر بالنقطة (٢، ٤) ∴ نعوض عن س = ٤ ، ص = ٢

$$ج + \frac{٨-}{٧} = ٢ \quad ج + ٤ \times \frac{٢-}{٧} = ٢$$

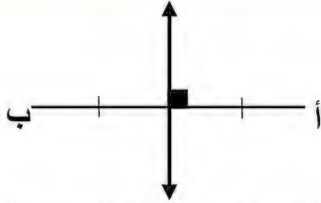
$$\frac{٢٢}{٧} = ج ∴ \quad \frac{٨}{٧} + ٢ = ج$$

$$\frac{٢٢}{٧} + س = \frac{٢-}{٧} = ص ∴ \text{المعادلة هي : ص = } \frac{٢-}{٧} + س$$

## مثال ١٢

إذا كانت أ (٣، ٢-) ، ب (٥، ٠) فأوجد معادلة محور تماثل أ ب

## الحل



محور تماثل القطعة المستقيمة

هو المستقيم العمودي عليها من منتصفها

$$\text{ميل أ ب} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٣ - ٥}{٢ - ٠} = \frac{٢}{٢} = ١$$

∴ محور التماثل  $\perp$  أ ب ∴ ميل محور التماثل = -١

لحساب قيمة ج :

∴ محور التماثل يمر بنقطة منتصف أ ب

$$\text{منتصف أ ب} = \left( \frac{\text{مجموع السينات}}{٢}, \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$$

$$(٤، ١-) = \left( \frac{٥ + ٣}{٢}, \frac{٠ + ٢-}{٢} \right) =$$

∴ محور التماثل يمر بالنقطة (٤، ١-)

بالتعويض في المعادلة ص = م س + ج

$$٤ = ١- \times ١- + ج$$

$$٣ = ج \quad ٤ = ١ + ج$$

معادلة محور التماثل هي : ص = - س + ٣

## مثال ١٣

أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محوري الإحداثيات السيني والصادي جزءين موجبين طوليهما ٩ ، ٤

## الحل

$$ص = م س + ج$$

∴ المستقيم يمر بالنقطتين (٠، ٤) ، (٩، ٠)

$$م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٠ - ٤}{٩ - ٠} = \frac{-٤}{٩} = -\frac{٤}{٩}$$

$$ج = ٤ ∴$$

$$\frac{٩}{٤} - س = ص ∴ \text{المعادلة هي : ص = } \frac{٩}{٤} - س$$

## مثال ١٤

أوجد معادلة المستقيم الذي ميله يساوى ميل المستقيم  $\frac{ص - ١}{س} = \frac{١}{٣}$  ويقطع جزءا سالبا من محور الصادات مقداره ٣ وحدات

## الحل

$$\text{نظبط شكل المعادلة } \frac{ص - ١}{س} = \frac{١}{٣} \text{ (مقص)}$$

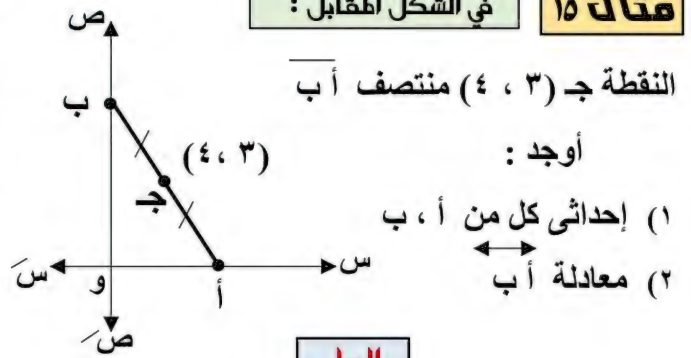
$$٣ص - ٣ = س \quad \leftarrow \quad ٣ص - س = ٣$$

$$٣ = ج ، \quad \frac{١}{٣} = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = م$$

$$\frac{١}{٣} - س = ص ∴ \text{المعادلة هي : ص = } \frac{١}{٣} - س$$

مثال ١٥

في الشكل المقابل :



الحل

∴ أ تقع على محور السينات ∴ أ = (س ، ٠)

∴ ب تقع على محور الصادات ∴ ب = (٠ ، ص)

منتصف أ ب =  $(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢}, \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢})$

$$(\frac{٠ + \text{ص}}{٢}, \frac{س + ٠}{٢}) = (٤ ، ٣)$$

$$\frac{ص}{٢} = ٣ \quad \frac{س}{٢} = ٤$$

$$\text{ص} = ٦ \quad \text{س} = ٨$$

$$\text{أ} = (٠ ، ٦) \quad \text{ب} = (٨ ، ٠)$$

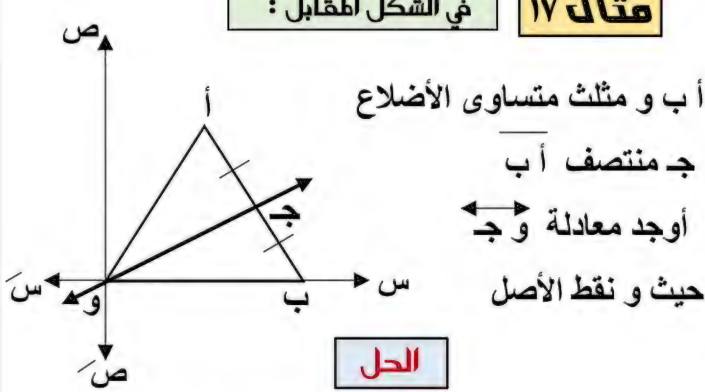
معادلة أ ب : ص = م س + ج

$$\text{ميل أ ب} = \frac{٠ - ٨}{٦ - ٠} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣} \quad \text{ج} = ٨$$

∴ معادلة أ ب هي ص = م س + ج

مثال ١٧

في الشكل المقابل :



الحل

∴ أ و ب Δ متساوي الأضلاع

$$\text{ق (أ و ب)} = ٦٠^\circ$$

∴ ج منتصف أ ب (أي أن و ج متوسط في المثلث)

∴ و ج ينصف أ و ب

$$\text{ق (ج و ب)} = ٣٠^\circ$$

وهي الزاوية التي يصنعها و ج مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$$\frac{١}{\sqrt{٣}} = ٣٠^\circ \text{ الميل}$$

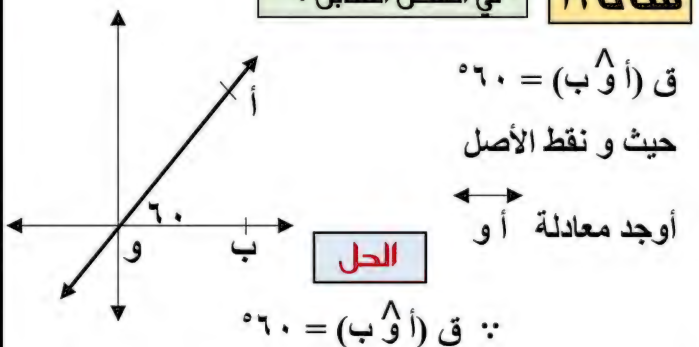
∴ ج و يمر بنقطة الأصل و ∴ ج = صفر

$$\text{ص} = م س + ج$$

∴ المعادلة هي ص = م س + ج

مثال ١٦

في الشكل المقابل :



الحل

$$\text{ق (أ و ب)} = ٦٠^\circ$$

وهي الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

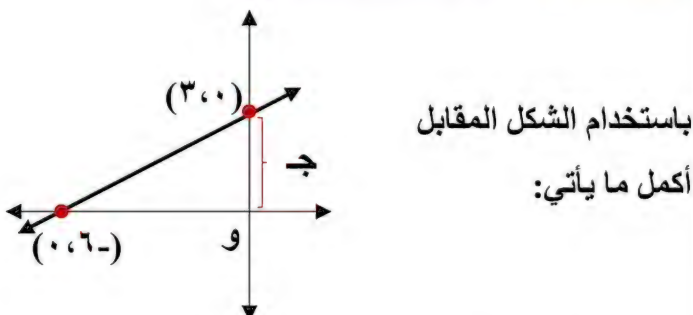
$$\frac{١}{\sqrt{٣}} = ٦٠^\circ \text{ الميل}$$

∴ أ و يمر بنقطة الأصل و ∴ ج = صفر

$$\text{ص} = م س + ج \quad \text{∴ المعادلة: ص} = \frac{١}{\sqrt{٣}} س$$

مثال ١٨

في الشكل المقابل :



(١) طول الجزء المقطوع من محور الصادات = .....

(٢) طول الجزء المقطوع من محور السينات = .....

(٣) ميل الخط المستقيم م = .....

(٤) معادلة الخط المستقيم هي .....



## حساب طول الجزء المقطوع من محور الصادات

إذا كانت المعادلة على الصورة  
ص = أ س + ج فإن:

$$\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}} = \text{الجزء المقطوع من محور الصادات}$$

إذا كانت المعادلة على الصورة  
أ س + ب ص + ج = ٠ فإن:

$$\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}} = \text{الجزء المقطوع من محور الصادات}$$

ولكن في الحالتين يكون **طول الجزء المقطوع من محور الصادات** =  $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}$

### مثال ١

أوجد الميل و الجزء المقطوع من  
محور الصادات للمستقيم  $ص = ٣س + ١٢$

#### الحل

نظبط المعادلة فتكون:

$$٢ص - ٣س = ١٢$$

$$\text{الميل م} = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{٣}{٢}$$

$$\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}} = \text{الجزء المقطوع من محور الصادات}$$

$$٦ = \frac{١٢}{٢}$$

### مثال ٢

أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من  
محور الصادات للمستقيم  $١ = \frac{ص}{٣} + \frac{س}{٢}$

#### الحل

لاحظ أن : معامل س =  $\frac{١}{٢}$  ، معامل ص =  $\frac{١}{٣}$

$$\text{الميل م} = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{\frac{١}{٢}}{\frac{١}{٣}} = \frac{٣}{٢}$$

$$٣ = \frac{٣}{١} \times \frac{١}{٢} =$$

$$\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}} = \text{طول الجزء المقطوع من محور الصادات}$$

$$٣ = \frac{١}{\frac{١}{٣}} =$$

## ملاحظات على معادلة الخط المستقيم

١) معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة (أ ، ب) هي : ص = ب

مثال: المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة (٢ ، ٥) معادلته هي : ص = ٥

٢) معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (أ ، ب) هي : س = أ

مثال: المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (٣ ، ٤) معادلته هي : س = ٣

٣) إذا كان المستقيم يمر بنقطة الأصل فإن الجزء المقطوع من محور الصادات ج = صفر

معادلة المستقيم الذي ميله يساوى ٣ ويمر بنقطة الأصل هي : ص = ٣س

معادلة المستقيم الذي ميله يساوى واحد ويمر بنقطة الأصل هي : ص = س

٤) معادلة محور السينات هي ص = صفر ، معادلة محور الصادات هي س = صفر

١

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢)  
ويوازي المستقيم الذي معادلته  $ص = ٣س + ٥$

الحل

٢

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين  
(١ ، ١) ، (٢ ، ٥)

الحل

٣

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣، -٥)  
عموديا على المستقيم  $ص + ٢ = ٧$

الحل

٤

أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من محور  
الصادات للمستقيم الذي معادلته  $ص + ٥ = ١٠ - ١٠$

الحل



## أسئلة اختر على معادلة المستقيم

١ الخط المستقيم الذى معادلته  $3ص = 2س + 6$  يقطع جزءا من محور الصادات طوله = ..... وحدة طول

- (أ) ٦ (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣-

٢ المستقيم الذى معادلته  $2س - 3ص = 6$  يقطع من محور الصادات جزءا طوله ..... وحدة طول

- (أ) ٦- (ب) ٢- (ج) ٢ (د)  $\frac{2}{3}$

٣ معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣، ٥) ويوازي محور الصادات هي .....

- (أ)  $3 = س$  (ب)  $ص = ٥-$  (ج)  $2 = ص$  (د)  $٥ = س$

٤ معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣، ٥) ويوازي محور السينات هي .....

- (أ)  $3 = س$  (ب)  $ص = ٥-$  (ج)  $2 = ص$  (د)  $٥ = س$

٥ معادلة المستقيم الذى ميله يساوى ٣ ويمر بنقطة الأصل هي .....

- (أ)  $3 = س$  (ب)  $3 = ص$  (ج)  $3 = ص$  (د)  $3 = -ص$

٦ معادلة المستقيم الذى ميله يساوى واحد ويمر بنقطة الأصل هي .....

- (أ)  $1 = س$  (ب)  $1 = ص$  (ج)  $٠ = ص$  (د)  $ص = س$

٧ الخط المستقيم  $ص - 2س = ٥$  يقطع من المحور الصادى جزءا طوله ..... وحدة طول

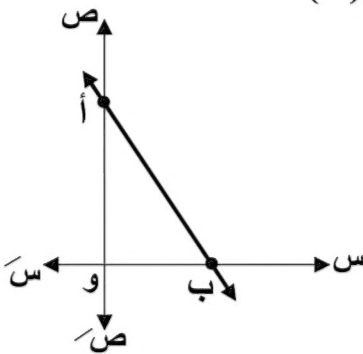
- (أ) ٢ (ب) ٥ (ج) ٧ (د) ١٠

٨ المستقيم الذى معادلته  $س + 2ص = ٧$  يقطع من محور السينات جزءا طوله ..... وحدة طول

- (أ) ٢ (ب) ١ (ج) ٧ (د) ٣

٩ مساحة المثلث المحدد بالمستقيمات  $3س - 4ص = ١٢$  ،  $ص = ٠$  ،  $س = ٠$  تساوى ..... وحدة طول مربعة

- (أ) ٦ (ب) ٧ (ج) ٥ (د) ١٢



١٠ في الشكل المقابل:

إذا كان  $ا = ٨$  وحدات طول ،  $ب = ٦$  وحدات طول

فإن معادلة  $أ ب$  هي .....

- (أ)  $ص = \frac{4}{3}س + ٨$  (ب)  $ص = -\frac{4}{3}س - ٨$

- (ج)  $ص = \frac{3}{4}س - ٨$  (د)  $ص = -\frac{4}{3}س + ٨$

## تمارين على معادلة الخط المستقيم

١٠ إذا كانت أ (٣، ١) ، ب (٥، ٣) فأوجد

معادلة محور تماثل أ ب

١١ أوجد معادلة المستقيم العمودى على أ ب

من نقطة منتصفها حيث أ (١، ٢) ، ب (٥، ٤)

١٢ إذا كانت أ (٥، ٦) ، ب (٣، ٧) ، ج (١، ٣)

فأوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة أ

وبمنتصف ب ج

١٣ أوجد ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع

من محور الصادات للمستقيم الذى معادلته:

$$٢س + ٣ص = ٦$$

١٤ أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته:

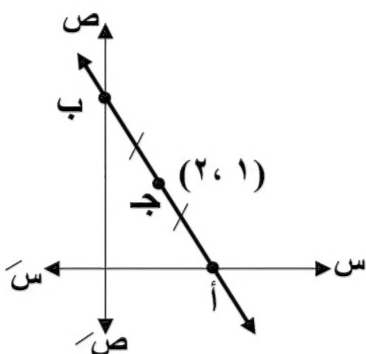
$$٢س - ٦ص = ١٢$$

ثم أوجد نقطتى تقاطعه مع محورى الإحداثيات

١٥ أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى

الإحداثيات السينى والصادى جزءين موجبين

طوليها ١ ، ٤ وحدات طول على الترتيب



١٦ فى الشكل المقابل:

ج (١، ٢) منتصف أ ب

فأوجد:

- (١) إحداثى أ ، ب
- (٢) معادلة أ ب
- (٣) مساحة المثلث أ ب ج

١ أوجد معادلة المستقيم الذى ميله ٢ ويقطع من

الجزء الموجب لمحور الصادات جزءا طوله ٧ وحدات

٢ أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله يساوى ٣

ويمر بالنقطة (٥، ٠)

٣ أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين

(٢، ٣) ، (٣، ٢)

٤ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٤، ٢) ،

(٢، ١) ثم اثبت أنه يمر بنقطة الأصل

٥ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، ٥)

عموديا على المستقيم الذى ميله  $\frac{1}{3}$

٦ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، ٥)

ويوازى المستقيم  $٢س - ٣ص + ٦ = ٠$

٧ أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٢، ٥)

عموديا على المستقيم الذى معادلته  $٢س + ٧ص = ٠$

٨ أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢، ٥)

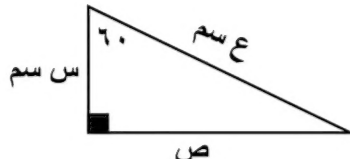
ويوازى المستقيم المار بالنقطتين (٢، ١) ، (٢، ٧)

٩ أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع جزءا موجبا

من محور الصادات طوله ٣ وحدات ويوازى المستقيم

$$٢س - ٣ص = ٦$$



- (١) عدد محاور تماثل المثلث المتساوي الأضلاع = .....
- (أ) ١ (ب) ٣ (ج) ٢ (د) صفر
- (٢) المثلث  $أب ج$  فيه  $أب < أ ج$  فإن  $ق (ب)$  .....  $ق (ج)$
- (أ)  $<$  (ب)  $>$  (ج)  $=$  (د)  $\geq$
- (٣) قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوي الأضلاع = .....
- (أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (ج) ١٢٠ (د) ٤٥
- (٤) محيط الدائرة = .....
- (أ)  $\pi$  نق (ب)  $\pi$  نق<sup>٢</sup> (ج)  $\pi$  نق (د)  $\pi$  نق<sup>٤</sup>
- (٥)  $\Delta$   $أب ج$  المتساوي الساقين إذا كان إحدى زوايا القاعدة =  $٣٠^\circ$  فإن قياس زاوية الرأس = .....
- (أ) ١٢٠ (ب) ٦٠ (ج) ٧٥ (د) ٣٠
- (٦)  $أب ج د$  متوازي أضلاع ن فإذا كان  $ق (أ) = ٤٠^\circ$  فإن  $ق (ب) =$  .....
- (أ) ٤٠ (ب) ٨٠ (ج) ١٢٠ (د) ١٤٠
- (٧) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة ..... من جهة الرأس
- (أ) ١ : ١ (ب) ٣ : ٢ (ج) ٢ : ١ (د) ١ : ٢
- (٨) إذا كان طولاً ضلعين في مثلث متساوي الساقين ٢ سم ، ٥ سم فإن طول الضلع الثالث = .....
- (أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٥ (د) ٧
- (٩) مساحة المربع الذي محيطه ١٦ سم = ..... سم<sup>٢</sup>
- (أ) ٤ (ب) ٨ (ج) ١٦ (د) ٢٥٦
- (١٠) مجموع طولى أي ضلعين في مثلث ..... طول الضلع الثالث.
- (أ) أصغر من (ب) يساوى (ج) أكبر من (د) ضعف
- (١١) في الشكل المقابل :
- 
- (أ)  $س + ص = ع$  (ب)  $ع = س + ص$  (ج)  $ع = س^٢$  (د)  $ص = ع - ٢$
- (١٢) أسطوانة دائرية قائمة إذا كان ارتفاعها = طول نصف قطر قاعدتها نق فإن حجمها = ..... سم<sup>٣</sup>
- (أ)  $\pi$  نق<sup>٢</sup> (ب)  $\pi$  نق<sup>٢</sup> (ج)  $\pi$  نق<sup>٢</sup> (د)  $\frac{٤}{٣} \pi$  نق<sup>٢</sup>